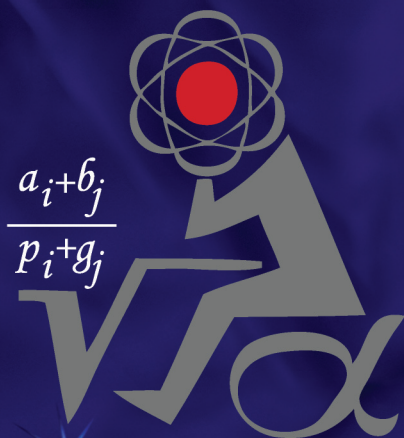


Индекс 70465



Библиотечка КВАНТ

ИЗБРАННЫЕ ОЛИМПИАДНЫЕ
ЗАДАЧИ



МАТЕМАТИКА

ВЫПУСК

100

выпуск
Библиотечка КВАНТ 100

ВЫПУСК

100



Библиотечка КВАНТ

Н.Б.Васильев,
А.П.Савин,
А.А.Егоров



ИЗБРАННЫЕ
ОЛИМПИАДНЫЕ
ЗАДАЧИ

МАТЕМАТИКА

Б Ю Р О





Приложение к журналу
«Квант» №2/2007

**Н.Б.Васильев,
А.П.Савин,
А.А.Егоров**

ИЗБРАННЫЕ ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ

математика



Москва
2007

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721
В19

Серия
«Библиотечка «Квант»
основана в 1980 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Б.М.Болотовский, А.А.Варламов, В.Л.Гинзбург,
Г.С.Голицын, Ю.В.Гуляев, М.И.Каганов, С.С.Кротов,
С.П.Новиков, Ю.А.Осипьян (председатель),
В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов,
А.И.Черноуцан (ученый секретарь)

В19 Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А.

Избранные олимпиадные задачи. Математика. – М.: Бюро Квантум, 2007. – 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 100. Приложение к журналу «Квант» № 2/2007.)

ISBN 5-85843-065-1

Книга представляет собой сборник задач различных олимпиад по математике, проводившихся в разные годы. Основой для нее послужила книга Н.Б.Васильева и А.П.Савина «Избранные задачи математических олимпиад», вышедшая в 1968 году. По сравнению с первым изданием книга существенно расширена и переработана. Все задачи снабжены ответами и указаниями, многие – подробными решениями.

Книга предназначена старшеклассникам, учителям, руководителям математических кружков и всем любителям поломать голову над математическими задачами.

ББК 22.1я721

ISBN 5-85843-065-1

© Бюро Квантум, 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1968 году издательством МГУ была выпущена книга Н.Б.Васильева и А.П.Савина «Избранные задачи математических олимпиад». Книга состояла из двух частей по 120 задач в каждой и предназначалась для учащихся Всесоюзной заочной математической школы при МГУ. В ней не было алгебраических и арифметических задач, так как предполагалось, что им будут посвящены другие книги. По разным причинам такие книжки так и не появились.

В предисловии к своей книге Н.Б.Васильев и А.П.Савин писали:

«Авторы старались выбрать из множества задач, предлагавшихся в последние годы на разных математических олимпиадах, те, которые казались им необычными и наиболее красивыми. Поэтому неудивительно, что в этот сборник попали, за очень небольшим исключением, трудные задачи... Здесь встречаются задачи, на решение которых можно потратить не только несколько часов, но и несколько недель. Почти все задачи снабжены указаниями или ответами. Некоторые из этих задач решены подробно, но в большинстве случаев указания написаны настолько коротко, что требуется еще большая самостоятельная работа, чтобы получить их решение».

Николай Борисович Васильев (1940–1998) и Анатолий Павлович Савин (1932–1998) были выдающимися деятелями математического просвещения. Еще студентами они участвовали в работе школьных математических кружков и проведении московских и других математических олимпиад. Придуманные ими задачи до сих пор составляют заметную часть «математического фольклора».

В 1970 году начал выходить журнал «Квант», активными членами редколлегии которого до последних своих дней были Н.Б.Васильев и А.П.Савин, во многом определившие стиль и уровень математического содержания журнала. В частности, Н.Б.Васильев бессменно руководил «Задачником «Кванта», а А.П.Савин вел раздел «Квант» для младших школьников».

При подготовке настоящего издания мною были написаны несколько более подробные указания и решения всех задач и добавлены две главы, посвященные алгебре и арифметике.

Кроме того, несколько задач были заменены на близкие по содержанию поучительные задачи, появившиеся уже после 1968 года (в частности, из «Задачника «Кванта»).

Таким образом, предлагаемая вам книга состоит из «фундамента» – книги Н.Б.Васильева и А.П.Савина (главы «Разные задачи» и «Геометрические задачи») и еще двух глав («Алгебраические задачи» и «Делимость целых чисел»).

В книгу вошли задачи, предлагавшиеся на математических олимпиадах разных уровней, а также некоторые задачи из других источников (сборники задач, фольклор и т.д.). Близкие по тематике и идеям решения задачи объединены в группы, отделяемые друг от друга подзаголовками или отточиями вида ***. Наиболее трудные задачи снабжены значками * и **. Задачи, узловые для соответствующих разделов, помечены значком °. Сборник отнюдь не претендует на абсолютную полноту (это в принципе невозможно). Так, например, в алгебраической части отсутствуют классические задачи на доказательство неравенств.

Бытует мнение, что к математической олимпиаде, в отличие от экзамена по математике, подготовиться нельзя. В общем, это действительно так. Тем не менее, готовить себя к участию в олимпиаде нужно. Для этого необходимо решать нестандартные задачи, чтобы войти в круг идей и понятий, научиться видеть ту ниточку, потянув за которую можно «вытянуть» решение.

Не следует думать, что эта книга предназначена для профессионалов-«олимпиадников». Она может быть полезна и учителям, ведущим кружки и внеклассные занятия, и вообще всем любителям поломать голову над математическими задачами.

Мне довелось подготовить к публикации расширенное издание книги двух людей, которые в течение почти сорока лет были моими близкими друзьями. Насколько книга удалась, судить читателям.

Я благодарю И.В.Яценко, директора Московского центра непрерывного математического образования, ставшего одним из инициаторов настоящего издания, и М.Ю.Панова, оказавшего существенную помощь при подготовке рукописи книги.

Выражаю также глубокую признательность А.В.Жукову, Ж.М.Рабботу и А.В.Спиваку за ценные советы, обсуждения и помощь в отборе задач.

О всех замеченных опечатках, неточностях и других недочетах книги просим сообщить в редакцию журнала «Квант».

А.А.Егоров

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Алгебраические преобразования

1°. Докажите, что а) если число N есть сумма квадратов двух целых чисел, то каждое из чисел $2N$ и N^2 тоже есть сумма квадратов двух целых чисел; б) если числа N_1 и N_2 представлены в виде суммы двух квадратов целых чисел, то и N_1N_2 также представляется в виде суммы двух квадратов целых чисел.

2. Если сумма (разность) двух целых чисел есть точный квадрат, то удвоенная сумма (разность) кубов этих чисел есть сумма трех квадратов.

3. а) Можно ли число $3a^4 + 1$ (где a – целое) представить в виде суммы трех квадратов целых чисел?

б*) Конечно или бесконечно количество решений в целых числах уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3t^4 + 1?$$

4*. Выясните, конечно или бесконечно число решений в натуральных числах уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 3.$$

5. Можно ли число $1^2 + 2^2 + \dots + 2001^2$ представить в виде суммы а) 2000; б) 1999 различных квадратов целых чисел?

6°. Известно, что для действительных чисел a, b, c выполняются равенства $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдите $a^4 + b^4 + c^4$.

7. Докажите, что если

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$$

то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (x, y, z, a, b, c отличны от 0).

8. а°) Докажите, что если $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$, то

$$(a + b + c)^{2n+1} = a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$$

для каждого натурального n .

б) Докажите, что если $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, то

$$\frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}}$$

для каждого натурального n .

9. Докажите, что если $a + b = c + d$ и $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, то

$$a^n + b^n = c^n + d^n$$

для каждого натурального n .

10. Вычислите значение выражения

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx},$$

если $xyz = 1$.

11. Числа x , y и z попарно различны и удовлетворяют соотношениям

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}.$$

Чему может равняться xyz ?

12. Докажите, что, если $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, то либо $x + y + z = 0$, либо $x = y = z$.

13. Докажите, что если $ad - bc = 1$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \neq 1.$$

14. Докажите, что если числа a , b , c попарно различны, то

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \neq 0.$$

Преобразования числовых выражений

15. Вычислите а) $\sqrt{2003^2 + 2003^2 \cdot 2004^2 + 2004^2}$;

б) $\sqrt{1993 \cdot 1995 \cdot 1997 \cdot 1999 + 16}$.

16. Запишите число

$$\sqrt{2\sqrt{7-4\sqrt{3}}},$$

использовав знак $\sqrt{\quad}$ только один раз.

17. Запишите число

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$$

без «двухэтажных радикалов».

18. Какое из двух чисел больше:

$$3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4} \text{ или } \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25} ?$$

19°. Пусть α – корень уравнения $\alpha^3 - \alpha - 1 = 0$. Вычислите

а) $\sqrt[3]{3\alpha^2 - 4\alpha} + \sqrt[3]{3\alpha^2 + 4\alpha + 2}$;

б) $\sqrt[3]{3\alpha^2 - 4\alpha} + \alpha\sqrt[4]{2\alpha^2 + 3\alpha + 2}$.

20. Сравните числа

$$\sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15} + 2\sqrt{3\sqrt[3]{4} - 3} \text{ и } 3.$$

21*. Что больше:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \text{ или } 1?$$

22*. Найдите n -й знак после запятой в десятичном разложении числа $(5 + \sqrt{26})^n$, если а) $n = 1000$; б) $n = 1001$.

23*. Пусть α – наибольший корень уравнения $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Найдите первые 300 знаков после запятой в десятичном разложении числа α^{2000} .

24**. Пусть α – корень уравнения $x^3 - x - 3 = 0$. Что больше: α или $\sqrt[5]{13}$?

25. При каких целых неотрицательных m и n справедливо равенство

$$(3 + 5\sqrt{2})^m = (5 + 3\sqrt{2})^n ?$$

26. Имеет ли уравнение $(x + y\sqrt{2})^4 + (z + w\sqrt{2})^4 = 5 + 4\sqrt{2}$ решения в рациональных числах x, y, z, w ?

27. Докажите, что $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1967}$ можно представить в виде $a\sqrt{3} - b\sqrt{2}$, где a и b – целые числа, причем $3a^2 - 2b^2 = 1$.

28. Докажите, что для любого натурального числа n число $(\sqrt{2} - 1)^n$ можно представить в виде разности $\sqrt{m+1} - \sqrt{m}$, где m – целое.

29. Числа a, b, c – корни уравнения $x^3 - 3x + 1$, причем $a < b < c$. Докажите, что $b^2 - a = c^2 - b = a^2 - c = 2$.

Цифры и числа

30°. Запишите в виде несократимой дроби число:

а) $\frac{1010111110101}{1100111110011}$; б) $\frac{1010\underbrace{11\dots1}_{2n+1}010}{1100\underbrace{11\dots1}_{2n+1}0011}$.

31. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{99\dots 9^3}_{n \text{ девяток}}$.

32. Найдите сумму цифр всех натуральных чисел: а) от 1 до 2000; б) от 1 до 10^n .

33. Найдите а) количество; б) сумму цифр в десятичной записи числа $9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdot \dots \cdot \underbrace{99\dots 9}_{2^{2002}}$ (количество цифр в каждом числе в 2 раза больше, чем в предыдущем).

34*. Существует ли натуральное число, сумма цифр квадрата которого равна а) 1994; б) 1993?

35. Наборщик рассыпал некоторое число, являющееся шестой степенью натурального числа a . Найдите a , если цифры рассыпанного числа 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9.

36. Докажите, что число

а) $53 \cdot 83 \cdot 109 + 40 \cdot 66 \cdot 96$;

б) 16016003;

в) 1280000401;

г) $2^{10} + 5^{12}$;

д**) $\frac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$

является составным.

37. Делится ли число $2^{202} + 1$ на $2^{101} + 2^{51} + 1$?

Последовательности и прогрессии

38. На доске записаны дроби $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{12}$.

а) Можно ли расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы полученная сумма оказалась равна 0?

б) Какое наименьшее количество чисел нужно вычеркнуть, чтобы после некоторой расстановки знаков получилась сумма, равная 0?

39. Пусть S_k — сумма первых k членов арифметической прогрессии, a_m — ее m -й член. Найдите:

а) a_{p+q} , если $a_p = q$, $a_q = p$ ($p \neq q$);

б) S_{p+q} , если $S_p = q$, $S_q = p$ ($p \neq q$);

в) S_{p+q} , если $S_p = S_q$ ($p \neq q$).

40. Можно ли из последовательности $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ выделить:

а) арифметическую прогрессию с 2000 членов;

б) бесконечную арифметическую прогрессию?

41. Найдите произведение первых n членов геометрической прогрессии, если их сумма равна S , а сумма их обратных величин равна T .

42. Найдите сумму:

а) $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_n$;

б) $x + 2x^2 + \dots + nx^n$.

43. Докажите, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

44. Для данного натурального числа n вычислите

$$\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n \cdot (n+2)}\right).$$

45. Вычислите

$$\frac{3}{2^{2^2}} + \frac{3 \cdot 5}{2^{2^3}} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 17}{2^{2^4}} + \dots + \frac{(2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \dots (2^{2^{99}} + 1)}{2^{2^{101}}}.$$

46. Найдите сумму:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \ddots + \frac{1}{n}}}}}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \ddots + \frac{1}{n}}}}.$$

47. Найдите суммы:

а) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$;

б) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$;

в) $\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos nx \cos (n+1)x}$.

48. Если число $\frac{2^n - 2}{n}$ целое (n – натуральное число), то и число $\frac{2^{2^n - 1} - 2}{2^n - 1}$ – тоже целое. Докажите это.

49. Существует ли арифметическая прогрессия, состоящая из

а) трех; б) четырех; в*) n ; г**) бесконечного количества чисел,

каждое из которых является целой положительной степенью натурального числа?

50. Может ли сумма 1993-х последовательных нечетных чисел быть 1993-й степенью некоторого числа?

51. Можно ли между числами $1^2, 2^2, \dots, n^2$ расставить знаки «плюс» или «минус» так, чтобы полученная сумма оказалась равной 0, если: а) $n = 1999$; б) $n = 2000$; в) $n = 2001$?

52. Можно ли между числами $1^3, 2^3, \dots, n^3$ расставить знаки «плюс» или «минус» так, чтобы полученная алгебраическая сумма стала равна 0, если:

а) $n = 1999$; б) $n = 2000$; в) $n = 2001$?

Квадратный трехчлен

53. Найдите сумму квадратов корней уравнения $(x^2 + 2x)^2 - 1993(x^2 + 2x) + 1995 = 0$.

54. В квадратном уравнении $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q независимо пробегают все значения из отрезка $[-1; 1]$. Найдите множество значений, пробегаемых действительными корнями этого уравнения.

55. Докажите, что если уравнения $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ с целыми коэффициентами имеют общий нецелый корень, то $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$.

56. Пусть α – корень уравнения $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 0$), а β – корень уравнения $x^2 - px - q = 0$. Докажите, что между числами α и β найдется корень уравнения $x^2 - 2px - 2q = 0$.

57. a, b, c – попарно различные числа. Докажите, что если уравнения $x^2 + ax + bc = 0$ и $x^2 + bx + ca = 0$ имеют ровно один общий корень, то другие корни этих уравнений удовлетворяют уравнению $x^2 + cx + ab = 0$.

58. а) Докажите, что если для чисел p_1, p_2, q_1, q_2 выполнено неравенство

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0,$$

то квадратные уравнения $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ имеют вещественные корни и между двумя корнями каждого из них лежит корень другого.

59. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней. Может ли иметь корни уравнение $f(f(x)) = x$?

60. Неравенство $x^2 + px + q > 0$ (p и q – целые числа)

выполняется при всех целых x . Докажите, что оно верно и при всех действительных числах x .

61. Найдите наименьшее натуральное число a , для которого найдется квадратный трехчлен $a^2x + bx + c$ с целыми коэффициентами, имеющий два различных корня на интервале $(0;1)$.

62. Пусть \overline{abc} – простое трехзначное число (a, b, c – цифры). Может ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ иметь рациональные корни?

63. Может ли уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ иметь рациональные корни, если числа a, b и c нечетны?

64. Действительные числа a, b, c таковы, что $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ при всех $-1 \leq x \leq 1$. Докажите, что при этих значениях x выполнено неравенство $|cx^2 + bx + a| \leq 2$.

65. Рассматриваются всевозможные параболы $y = x^2 + px + q$, пересекающиеся с осями координат в трех различных точках. Докажите, что окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих точках, имеют общую точку.

Неравенства и оценки

66°. Какое из двух чисел больше:

а) $1997^{1998} \cdot 1998^{1999} \cdot 1999^{1997}$ или $1997^{1997} \cdot 1998^{1998} \cdot 1999^{1999}$; б) $1993^{1991} \cdot 1991^{1993}$ или 1992^{3984} ?

67. Какое из двух чисел больше:

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \ddots + \frac{1}{1995}}}}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \ddots + \frac{1}{1995}}}}?$$

68. Какое из чисел больше:

а) $3^{100} + 4^{100}$ или 5^{100} ;
б) $29^{200} \cdot 2^{151}$ или $5^{279} \cdot 3^{300}$?

69. Какое из двух чисел больше:

$$\sqrt{1990} + \sqrt{1992} \quad \text{или} \quad 2\sqrt{1991}?$$

70. Какое из двух чисел больше: $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$ или $\sqrt[3]{32}$?

71. Докажите, что

а) $\frac{13}{12} < \frac{1}{1993} + \dots + \frac{1}{7968} < \frac{11}{6}$;

б) $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} < 1$;

в) $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}$.

72. Какое из чисел больше:

$$\frac{10^{1965} + 1}{10^{1966} + 1} \quad \text{или} \quad \frac{10^{1966} + 1}{10^{1967} + 1} ?$$

73. Докажите неравенства:

а) $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$;

б*) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad (n > 1)$.

74. Больше или меньше единицы число

$$0,99999^{1,00001} \cdot 1,00001^{0,99999} ?$$

75. m и n – натуральные числа, такие, что $\sqrt{2} > \frac{m}{n}$. Докажите, что $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}n^2}$.

76. Докажите для каждого натурального n неравенство

а) $\underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{3 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{3}}}}}_{2n \text{ радикалов}} < 3$;

б) $\underbrace{\sqrt{a^2 + \sqrt{a^2 + \dots + \sqrt{a^2}}}}_{n \text{ радикалов}} < |a| + 1$;

в) $\frac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ радикалов}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} > \frac{1}{4}$

(в числителе n радикалов, в знаменателе $n - 1$ радикал).

77. Сумма нескольких положительных чисел равна сумме их квадратов. Что больше: сумма четвертых степеней этих чисел или сумма их кубов?

78. Докажите, что если при любом натуральном k из отрезков длины a^k, b^k, c^k ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$) можно составить треугольник, то среди чисел a , b , c есть два равных.

79. q_1, q_2, \dots, q_n – квадраты различных целых чисел, отличных от единицы. Докажите, что

$$\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_n}\right) > \frac{1}{2}.$$

80. Какое из положительных чисел a или b больше, если $a(1-b) > \frac{1}{4}$?

81. Докажите, что если положительные числа a, b, k, n удовлетворяют неравенству $ab > ka + nb$, то

$$a + b > (\sqrt{k} + \sqrt{n})^2.$$

82. При каких m из равенства $m(a-1) = a^2 + b$ следует, что $a > b$?

83. Положительные числа a, b и c таковы, что $c^2 = a^2 + b^2 - \frac{1}{2}ab$. Что больше: $a + c$ или b ?

84. Найдите наименьшее значение суммы $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2}$, если числа x, y, z неотрицательны и $x + y + z = 1$.

85. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $(a-v)^2 + (b-u)^2$, если $a^2 + b^2 = 1$, а $v^2 + u^2 = 4$.

86. Найдите наименьшее значение функции

$$\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}.$$

87. Положительные числа x, y и z удовлетворяют неравенствам $xyz > 1$, $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Сколько среди них чисел, меньших единицы?

88. Пусть x и y – положительные числа, S – наименьшее из чисел $x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$. Найдите наибольшее возможное значение S . При каких x и y оно достигается?

89. Сумма положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n равна 1. Пусть S – наибольшее из чисел $\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \dots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\dots+x_n}$. Найдите наименьшее возможное значение S . При каких значениях x_1, x_2, \dots, x_n оно достигается?

Алгебраические уравнения

90*. Решите уравнения:

а) $x^3 + 3x - 2 = 0$;

б) $x^4 - 4x - 1 = 0$;

в) $x^4 + 8x - 7 = 0$;

г) $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$;

д) $(2x^3 + x - 3)^3 = 3 - x^3$;

е) $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = 0$ (найдите положительные корни);

ж) $(x^{2k} + 1)(1 + x^2 + \dots + x^{2k-2}) = 2kx^{2k-1}$.

91. Для каждого значения параметра a решите уравнение

а) $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$;

б) $x^3 + 2ax^2 + a^2x + a - 1 = 0$,

где x – неизвестное, a – вещественный параметр.

92. Может ли уравнение

$$\sqrt{x + a\sqrt{x + b}} + \sqrt{x} = c$$

при некоторых вещественных a, b, c иметь бесконечное множество решений?

93°. Решите уравнения:

а) $2x^3 = (3x^2 - x - 1)\sqrt{1 + x}$;

б) $16x^3 = (11x^2 + x - 1)\sqrt{x^2 - x + 1}$.

94. Решите уравнение

$$2x^4 + 2y^4 = 4xy - 1 .$$

95. Решите уравнения:

а) $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{2 - z^2} + z\sqrt{3 - x^2} = 3$;

б) $x\sqrt{1 - y} + y\sqrt{1 - x} = xy$;

в) $\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \dots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{2}$.

96. При каких значениях a уравнение $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = a$ имеет корни?

97. При каких значениях p число $\sqrt[3]{1-p} + \sqrt[3]{1+p}$ будет целым?

98. Решите уравнение

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1} .$$

Системы уравнений

99. Решите системы уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} (x+y)^3 = z, \\ (y+z)^3 = x, \\ (z+x)^3 = y; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x^3 + y^3 = z, \\ y^3 + z^3 = x, \\ z^3 + x^3 = y; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x + y^2 = z^3, \\ x^2 + y^3 = z^4, \\ x^3 + y^4 = z^5; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3, \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0; \end{cases} \\ \text{д) } \begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6, \\ x^6 + x^2 = 8y^3 + 2y. \end{cases} \end{array}$$

100. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 + z^4 = 0, \\ y + z^2 + x^4 = 0, \\ z + x^2 + y^4 = 0? \end{cases}$$

101. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{1+x^2} = y, \\ \frac{2y^2}{1+y^2} = z, \\ \frac{2z^2}{1+z^2} = x. \end{cases}$$

102*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{x_2} = 1, \\ x_2 + \sqrt{x_3} = 1, \\ \dots\dots\dots \\ x_{24} + \sqrt{x_{25}} = 1, \\ x_{25} + \sqrt{x_1} = 1. \end{cases}$$

103. Найдите все решения системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 x_2 = x_1 + x_2 + 2, \\ 3x_2 x_3 = x_2 + x_3 + 2, \\ \dots\dots\dots \\ 3x_{n-1} x_n = x_{n-1} + x_n + 2, \\ 3x_n x_1 = x_n + x_1 + 2. \end{array} \right.$$

104. На доске записаны 3 уравнения:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0),$$

$$bx^3 + cx^2 + dx + a = 0,$$

$$cx^3 + dx^2 + ax + b = 0.$$

Докажите, что если первые два уравнения имеют общий корень, то и все три уравнения имеют общий корень.

Многочлены

105. Попарно различные числа x , y , и z таковы, что $x^3 - 3x = y^3 - 3y = z^3 - 3z$. Найдите $x^2 + y^2 + z^2$.

106. Многочлен $p(x)$ принимает целые значения только при целых x . Докажите, что $p(x) = \varepsilon x + b$, где b — целое число, а $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = \pm 1$.

107. Докажите, что ни один многочлен с целыми коэффициентами не может принимать в точке 7 значение 11, а в точке 11 – значение 13.

108. Докажите, что если для многочлена $p(x)$ с целыми коэффициентами $p(0)$ и $p(1)$ – нечетные числа, то уравнение $p(x) = 0$ не имеет целых корней.

109. Существует ли многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что все числа $p(0), p(1), \dots, p(k)$ являются простыми числами?

110. Найдите сумму коэффициентов многочлена

$$(x^4 - x + 1)^{1965} + (x^5 + x - 1)^{1965}$$

а) при четных; б) при нечетных степенях x .

111. Сумма коэффициентов многочлена равна 2, а сумма коэффициентов при нечетных степенях x равна сумме коэффициентов при четных степенях x . Найдите остаток от деления этого многочлена на $x^2 - 1$.

112. Докажите, что многочлен $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$ при любом целом $n \geq 0$ делится на $x^2 + x + 1$.

113. Можно ли, пользуясь только операциями сложения, вычитания и умножения, составить из многочленов $f(x)$ и $g(x)$ выражение, равное x , если

а) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 + 2$;

б) $f(x) = 2x^2 + x$, $g(x) = 2x$;

в) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 - 2$?

114. На доске написано уравнение

$$x^3 + \dots + x^2 + \dots x + \dots = 0.$$

Двое играют в такую игру. Первый ставит на любое из пустых мест целое число, отличное от нуля. Затем второй ставит целое число на одно из оставшихся мест. Наконец, первый ставит целое число на последнее свободное место. Может ли первый играть так, чтобы независимо от хода второго все корни полученного уравнения оказались целыми числами?

115. Дан многочлен $p(x)$ с а) натуральными; б) целыми коэффициентами. Для каждого натурального числа n обозначим через a_n сумму цифр в десятичной записи числа $p(n)$. Докажите, что найдется число, встречающееся в последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ бесконечное количество раз.

Тригонометрические подстановки

116. Решите уравнения:

а) $x^3 - 3x + 1 = 0$;

б) $x^3 - 3x + \sqrt{3} = 0$.

117*. Решите системы уравнений:

а)
$$\begin{cases} 2x^2 - 1 = y, \\ 2y^2 - 1 = z, \\ 2z^2 - 1 = x; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{2x}{1-x^2} = y, \\ \frac{2y}{1-y^2} = z, \\ \frac{2z}{1-z^2} = x; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sqrt{2}(x-y)(1+4xy) = \sqrt{3}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

118. Докажите, что если $x + y + z = xyz$, то

$$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}.$$

119. Докажите, что из любых четырех положительных чисел можно выбрать два числа x и y так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 \leq \frac{x-y}{1+x+y+2xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

120. Последовательность x_n задается условием: $x_1 = 2$,

$$x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1-2x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \text{ Докажите, что}$$

а) $x_n \neq 0$ (при всех n);

б) эта последовательность непериодическая.

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Делимость и делители

121. Докажите, что если p – простое число ($p \geq 5$), то $p^2 - 1$ делится на 24.

122°. Найдите все такие простые числа p , для которых $14p^2 + 1$ – тоже простое.

123°. Докажите, что для любого натурального n ($n \geq 3$) произведение всех простых чисел, не превосходящих n , больше n .

124°. Пусть $d(n)$ – число делителей натурального числа n . Докажите, что $d(n) < 2\sqrt{n}$.

125. Известно, что число n имеет ровно k делителей. Чему равно произведение всех делителей числа n ?

126. Докажите, что среднее арифметическое всех делителей натурального числа n заключено между \sqrt{n} и $\frac{1+n}{2}$.

127. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где p_i – простые числа, причем $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Докажите, что число делителей n равно $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.

128*. Даны два натуральных числа m и n . Пусть a_1, a_2, \dots, a_s – все различные делители числа m , а b_1, b_2, \dots, b_t – все различные делители числа n . Докажите, что если

$$a_1 + a_2 + \dots + a_s = b_1 + b_2 + \dots + b_t$$

и

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_s} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_t},$$

то $m = n$.

129*. Докажите, что число

$$\underbrace{111 \dots 111}_{2^n \text{ единиц}}$$

имеет не меньше 2^n различных делителей.

130. Найдите все натуральные числа n делящиеся, на все натуральные числа, не превосходящие \sqrt{n} .

131*. Докажите, что существует лишь конечный набор нату-

ральных чисел n , которые делятся на все натуральные числа, не превосходящие $\sqrt[k]{n}$ ($k \geq 3$ – натуральное число).

132. Найдите все натуральные числа n , для которых $n = pd(n)$, где p – некоторое простое число, а $d(n)$ – число делителей числа n .

133. Найдите все натуральные числа n такие, что все натуральные числа, меньшие n и взаимно простые с n , образуют арифметическую прогрессию.

Сравнения по модулю и арифметика остатков

134. Какой остаток дает число 2^{1000} при делении
а) на 7; б) на 9?

135. Найдите две последние цифры числа

$$4^{4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \} 1973 \text{ четверки.}$$

136. Докажите, что

а) если $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ делится на 5, то каждое из чисел a , b , c , d делится на 5;

б) если $a^2 + b^2$ делится на 7, то a и b делятся на 7;

в) если $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 7, то и abc делится на 7.

137. Докажите, что произведение двух последних цифр квадрата целого числа четно.

138. Может ли квадрат целого числа оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами, отличными от нуля?

139. Число является квадратом целого числа и оканчивается цифрой 5. Докажите, что его третья справа цифра четная.

140. Предпоследняя цифра квадрата целого числа нечетная. Найдите его последнюю цифру.

141. Докажите, что число $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ при любом натуральном n делится на 19.

142. При каких натуральных n число $2^{2n+1} - 3 \cdot 7^n + 5^{n+1} \cdot 6^n$ делится на 23?

143. Докажите, что число $n^5 - 5n^3 + 4n$ при любом натуральном n делится на 120.

144. При каких простых p число $p^4 - 5p^2 + 4$ не делится на 120?

145. Докажите, что число $11^{19} + 11^8 + 1$ делится на 133.

146. Докажите, что $m^2 + 1$ ни при каких целых m не делится на 19.

147. При каких натуральных n число $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ делится на 512?

148. При каких натуральных k число $k^{k+1} + (k+1)^k$ делится на 3?

Разложение на множители

149. Существует ли такое натуральное n , при котором $3^n + 1$ делится на 5^{1965} ?

150. Найдите все натуральные n , при которых число $2^n - 1$ а) делится на 49; б) делится на 7^k и не делится на 7^{k+1} .

151. Найдите наименьшее натуральное a , при котором число

$$A = 137^{2k-1} + a \cdot 144^{2k-1}$$

делится на 1967 при любом натуральном k .

152. Найдите все натуральные n , при которых число $n^4 + n^2 + 1$ является простым.

153. Найдите все простые числа вида $n^n + 1$, меньшие 10^{19} .

154. Найдите все простые числа p и q , для которых число $r = p^q + 1$ является простым.

155. Найдите все натуральные n , при которых числа $2^n - 1$ и $2^n + 1$ простые.

156. Докажите, что если $2^p - 1$ — простое число, то p — тоже простое.

157. Докажите, что если число $2^n + 1$ — простое, то n является степенью двойки.

158. Между двумя единицами вписано 2^{1969} нулей. Докажите, что если еще вписать любое количество нулей, меньшее 2^{1969} , то полученное число будет составным.

159. Может ли сумма нескольких последовательных натуральных чисел быть степенью двойки?

Десятичная запись числа

160°. Известно, что в десятичной записи числа 2^{29} участвуют ровно девять цифр и все эти цифры различны. Докажите, что среди этих цифр есть ноль.

161. Найдите наименьшую степень двойки, десятичная запись которой начинается цифрой 7.

162. Докажите, что десятичная запись степени двойки не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.

163. Пусть b — последняя цифра десятичной записи числа 2^n ($n \geq 4$), т.е. $2^n = 10a + b$. Докажите, что ab делится на 6.

164. Может ли число, записываемое в десятичной системе счисления при помощи 1973-х единиц и некоторого количества нулей, быть а) квадратом, б) кубом некоторого натурального числа?

165. Существуют ли два последовательных натуральных числа таких, что сумма цифр каждого из них делится на 125?

166. Чему равна максимальная разность между соседними числами из тех, сумма цифр которых делится на 7?

167. Найдите все натуральные числа, оканчивающиеся цифрами 1967, которые после вычеркивания этих цифр уменьшаются в целое число раз.

168°. Если к пятизначному числу приписать единицу в конце, то получится число в три раза большее, чем число, получающееся, если приписать единицу спереди. Найдите это пятизначное число.

169. Если последнюю цифру a шестизначного числа переставить в начало, то число увеличится в a раз. Найдите это число.

170. Найдите все девятизначные числа, в записи которых имеются все цифры, кроме нуля, увеличивающиеся в восемь раз после некоторой перестановки цифр.

171. Найдите все четырехзначные числа, которые в четыре раза больше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

172. Существует ли натуральное число, делящееся на 7, десятичная запись которого состоит из 7 единиц и некоторого числа нулей?

173. Докажите, что если число делится на 99, то сумма его цифр не меньше 18.

174. Найдите все натуральные числа n , для которых сумма

$$1! + 2! + 3! + \dots + n!$$

является точным квадратом.

175. Первые цифры в десятичной записи чисел 2^n и 5^n одинаковы. Каковы эти цифры?

176. Числа 2^{1971} и 5^{1971} выписаны одно за другим (в десятичной записи). Сколько всего цифр выписано?

177. Некоторое число обладает тем свойством, что если зачеркнуть последнюю цифру записи этого числа в двоичной системе счисления, то получится его запись в троичной системе счисления; если и теперь зачеркнуть последнюю цифру, то получится его же запись в десятичной системе счисления. Найдите это число.

178. Натуральное число k обладает тем свойством, что если натуральное число M делится на k , то и всякое число, полученное из M перестановкой цифр, тоже делится на k . Найдите все k , обладающие этим свойством.

179. Целое число делят с остатком последовательно на все натуральные числа, начиная от единицы и кончая самым числом. Оказалось, что если сложить все полученные остатки, то получится само это число. Найдите его.

180. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 равен либо единице, либо простому числу.

181. Может ли дискриминант квадратного трехчлена с целыми коэффициентами быть равным 23?

182. Два двузначных числа, записанные одно за другим, образуют четырехзначное число, которое делится на их произведение. Найдите исходные числа.

183. Найдите наибольший полный квадрат, такой, что после вычеркивания двух последних его цифр снова получается полный квадрат. (Предполагается, что одна из вычеркиваемых цифр не ноль.)

184. Если в некотором натуральном числе, не оканчивающемся нулем, зачеркнуть одну из цифр, то оно уменьшится в целое число раз. На каком месте может стоять вычеркиваемая цифра?

185. Подряд записано 99 девяток. Докажите, что к ним можно приписать справа 100 цифр так, что получившееся 199-значное число окажется полным квадратом.

Бесконечность множества простых чисел

186. Пусть P_n – произведение первых n простых чисел. Докажите, что ни одно из чисел $P_n - 1$ и $P_n + 1$ не является полным квадратом.

187. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2, 3, 5, 7, ..., p_n (первые n простых чисел) дает в остатке 1, и докажите затем, что существует простое число p , большее чем p_n . Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел.

188. Докажите, что среди чисел $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, ..., $n! - 1$ есть простое число. Пользуясь этим утверждением, докажите, что существует бесконечно много простых чисел.

189. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 4 остаток 3, т.е. простых чисел вида $4n + 3$. То же для простых чисел вида $6n + 5$.

190. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $p + n^{2k}$ ни при каких простых p и натуральных n и k .

191. Докажите, что любые два числа последовательности

$$2^{2^0} + 1 = 3, 2^{2^1} + 1 = 5, 2^{2^2} + 1 = 17, \dots, 2^{2^n} + 1, \dots$$

взаимно просты. Выведите из этого утверждения еще одно доказательство бесконечности множества простых чисел.

192. Докажите, что для любого натурального N существуют N последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не является простым.

193. Докажите, что для любого натурального N существуют N последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат натурального числа, отличного от единицы.

194. Докажите, что ни при каком натуральном n ($n > 1$) число

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

не является целым.

195. Докажите, что при всяком простом p числитель дроби, получающейся после приведения к общему знаменателю выражения

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1},$$

делится на p .

196. Можно ли число 1 представить в виде

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \dots + \frac{1}{n_{1971}},$$

где $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{1971}$ — различные нечетные числа?

Несколько теорем

197. (Алгоритм Евклида.) Даны два натуральных числа a и b . При делении на b число a дает остаток, равный r_1 . Разделим b на r_1 (ясно, что $r_1 < b$), получим в остатке r_2 , далее r_2 разделим на r_1 и получим в остатке r_3 и т.д. Докажите, что на некотором шагу r_{n-1} разделится на r_n нацело, при этом $r_n = \text{НОД}(a, b)$.

198. Докажите, что наибольшая степень простого числа p , на которую делится $n!$, равна $\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^m} \right]$, где $p^m \leq n < p^{m+1}$.

199. Докажите, что число $n!$ ни при каком натуральном n не делится на p^n (p – простое число).

200. Докажите, что число $(n!)!$ делится на $(n!)^{(n-1)!}$.

201. Найдите все натуральные n , для которых

а) $(n-1)!$ не делится на n ;

б) $(n-1)!$ не делится на n^2 .

202. Докажите, что если число p из набора $2, 3, 4, \dots, n$ взаимно просто со всеми остальными числами этого набора, то оно является простым числом, большим $\frac{n}{2}$.

203. (Теорема Вильсона.) Докажите, что натуральное число p является простым тогда и только тогда, когда $(p-1)! + 1$ делится на p .

204. (Малая теорема Ферма.) Докажите, что если p – простое число, то $a^p - a$ делится на p при любом целом a .

205. (Теорема Эйлера.) Обозначим через $\varphi(n)$, где n – натуральное число, количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним. Пусть a – взаимно простое с n число. Докажите, что $a^{\varphi(n)} - 1$ делится на n .

206. (Функция Эйлера $\varphi(n)$.) Как и в предыдущей задаче, $\varphi(n)$ – количество простых чисел, меньших n и взаимно простых с ним.

а) Найдите $\varphi(p^k)$, где p – простое число, k – натуральное.

б*) Докажите, что если натуральные числа m и n взаимно просты, то $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

в) Найдите $\varphi(n)$, если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где p_1, p_2, \dots, p_k – различные простые делители числа n .

Смесь

207. Простые числа p и q таковы, что $p^3 - 1$ делится на q , а $q - 1$ делится на p . Докажите, что $q = p^2 + p + 1$.

208. Докажите, что существует бесконечное количество натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех кубов целых чисел.

209. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех квадратов натуральных чисел.

210. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1967$ не имеет решений в целых числах.

211. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ и $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{2n}$ – два набора натуральных чисел, полученных некоторыми перестановками из

набора $1, 2, 3, \dots, 2n$. Докажите, что какие-нибудь два из чисел $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_{2n} + b_{2n}$ дают при делении на $2n$ одинаковые остатки.

212. Докажите, что последние цифры чисел вида $\frac{n(n+1)}{2}$ периодически повторяются, и найдите наименьший период.

213. Докажите, что последние цифры чисел вида n^n периодически повторяются, и найдите наименьший период.

214. Докажите, что натуральные числа k , для которых числа $k^k + 1$ делятся на 30, образуют арифметическую прогрессию. Найдите разность этой прогрессии.

215. Дана таблица чисел

0	1	2	3	...	1967
1	3	5	7	...	
4	8	12	...		
.....					
...					

(под каждой парой чисел записана их сумма). Докажите, что число, стоящее внизу, делится на 1967.

216. Числа Фибоначчи u_n образуют следующую последовательность: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... (каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих, т.е. $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ при $n \geq 3$). Докажите, что u_{5n} делится на 5.

217. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ — последовательность чисел, образованных по следующему закону:

$$a_1 = 1, \quad a_n = na_{n-1} + (-1)^n.$$

Докажите, что a_n делится на $n - 1$ при $n > 1$.

218. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ образована по закону

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n a_{n-1} + 1.$$

Докажите, что число a_{91968} чётно, но не делится на 4.

219. Некоторые из 20 листов бумаги разрезали на 10 частей, затем некоторые из получившихся листов разрезали еще на 10 частей и т.д. Когда подсчитали общее количество получившихся листов, то получили, что их число равно 1968. Докажите, что при подсчете была допущена ошибка.

220. Пятнадцать простых чисел образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что разность этой прогрессии больше 30000.

221. Докажите, что среди чисел $k, k + 1, k + 2, \dots, 2k$ при любом натуральном k найдется полный квадрат.

222. Можно ли выбрать 1000000 натуральных чисел так, чтобы никакая сумма нескольких из этих чисел не являлась полным квадратом?

223. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 1991$. Разрешается взять несколько чисел, сумма S которых делится на 5, вычеркнуть их и вписать число $S/5$. Можно ли добиться, чтобы в результате на доске осталось единственное число: а) 1; б) 2?

Уравнения в целых числах

224. При каких натуральных n сократима дробь $\frac{4n+5}{7n+5}$?

225. При каких целых n будет целым число $\frac{n^5+3}{n^2+1}$?

226. Число $3m + 5n$ делится на 19. Докажите, что число $7m + 18n$ тоже делится на 19.

227. Остап Бендер организовал в городе Арбатове раздачу слонов населению. На раздачу явилось 28 членов профсоюза и 37 не членов, причем Остап раздавал слонов поровну членам профсоюза и поровну не членам. Оказалось, что существует лишь один способ раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у Остапа Бендера?

228. Докажите, что если $a^2 + b^2 = c^2$ и a, b, c – взаимно простые числа, то abc делится на 60.

229. Докажите, что число $121k + 8$ ни при каком целом k не может быть представлено в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

230. Найдите все натуральные k , для которых число $22k + 5$ является квадратом целого числа.

231. Сколько существует целых чисел a , при которых число $a^2 + a + 1969$ является квадратом целого числа?

232. Докажите, что уравнение $x^2 + xy = y^2$ не имеет решений в целых ненулевых числах.

233. Решите в целых числах x и y уравнения

а) $3^x - y^3 = 1$;

б) $3^x - 2^y = 1$;

в) $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

234. Докажите, что уравнения

а) $19x^2 - 65y^2 = 1965$;

б) $19x^3 - 17y^3 = 50$;

в) $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ ($xyz \neq 0$)

не имеют решений в целых числах.

235. Решите в целых числах уравнение

$$\underbrace{\sqrt{n + \sqrt{n + \dots + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}}_{1961 \text{ знак корня}} = m.$$

236. а) Докажите, что все решения уравнения $x^n = y^m$, где натуральные числа m и n взаимно просты, задаются формулами $x = t^m$, $y = t^n$ (t – любое целое число).

б) Какими должны быть числа a и b , чтобы число $\log_a b$ было рациональным?

237. Решите в натуральных числах уравнения

а) $x^x + y^y = x^y + y^x$;

б) $x^{y^x} = y^{x^y}$.

238. а) Найдите все решения в рациональных числах уравнения $x^2 + x + 1 = y^2$.

б) Докажите, что существует бесконечно много рациональных чисел a , для которых число $8a^2 - 2a - 3$ является квадратом рационального числа.

239. Докажите, что уравнение

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

240. Пусть x и y – целые числа, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + x = 3y^2 + y. \quad (*)$$

Докажите, что числа

а) $x - y$;

б) $2x + 2y + 1$ – полные квадраты.

в) Докажите, что уравнение $(*)$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Последовательность операций

241. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые две секунды, вторые – через каждые три секунды. Всего прозвучало 13 ударов (слившиеся удары воспринимались как один). Сколько времени на первых часах?

242. Из Нью-Йорка в Гавр в 12 часов ежедневно отправляется пароход. Расстояние между этими портами он покрывает за 7 суток. Сколько пароходов, следующих из Нью-Йорка в Гавр, встретит на своем пути пароход, отправляющийся в 6 часов из Гавра в Нью-Йорк?

243. Имеются два сосуда. В первом находится один литр воды, а второй пустой. Из первого переливают половину имеющейся в нем воды во второй, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и т.д. Найдите количество воды, оказавшейся в первом сосуде после 1965-го переливания.

244. а) Восьмиклассники построены в шеренгу. Перед каждым из них стоит семиклассник, который ниже его по росту. Докажите, что если шеренгу восьмиклассников выстроить по росту и шеренгу семиклассников тоже выстроить по росту, то по-прежнему каждый восьмиклассник будет выше стоящего перед ним семиклассника.

б) Полк солдат выстроен в виде прямоугольника так, что в каждой шеренге солдаты стоят по росту. Докажите, что если в каждой колонне перестроить солдат по росту, то в каждой шеренге они по-прежнему будут стоять по росту.

245. В ящик вложили k ящиков. В каждый из k вложенных ящиков либо вложили k новых ящиков, либо не вложили ни одного и т.д. (рис.1). Найдите число пустых ящиков, если заполненных ящиков (т.е. ящиков, в которые вложены другие ящики) оказалось m штук.



$k = 3, m = 7$

246. Один математик выписывает

Рис.1

подряд натуральные числа, повторяя некоторые из них, так чтобы у каждого числа n оказались выписанными ровно n его делителей (включая 1 и само число n). Получается такая последовательность:

1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, ...

а) Сколько раз он выпишет число 3^m ?

б) Докажите, что в этой последовательности встретятся все натуральные числа.

247. Числа 1, 2, ..., n расположены на окружности по часовой стрелке. За один ход разрешается переставить любые два из этих чисел. Найдите наименьшее число ходов, после которых числа будут располагаться в том же порядке, но против часовой стрелки.

248°. В таблице $m \times n$ разрешается изменить знак у всех чисел одной строки или у всех чисел одного столбца. Докажите, что несколькими такими заменами можно добиться того, что суммы чисел в каждом столбце и в каждой строке будут неотрицательны.

249. Имеется 35 целых чисел. Разрешается одновременно прибавить по единице к некоторым 23 из них. Докажите, что, повторив эту операцию некоторое число раз, можно сделать все данные числа равными.

Каким условиям должны удовлетворять числа m и n ($m < n$), чтобы была разрешима общая задача*: заданы произвольные n целых чисел, разрешается прибавлять по единице к любым m из них и требуется добиться того, чтобы все они стали равными?

250. В n кошельках лежат деньги. Из первого кошелька перекладывают во второй $\frac{1}{n}$ содержащихся в нем денег, затем из второго перекладывают в третий $\frac{1}{n}$ оказавшейся там суммы, затем из третьего – перекладывают в четвертый $\frac{1}{n}$ оказавшейся там суммы и т.д., наконец, из последнего перекладывают в первый $\frac{1}{n}$ оказавшейся там суммы. Какое количество денег было первоначально в каждом кошельке, если после всех перекладываний в каждом кошельке оказалось по A рублей?

251*. В ящик поставим два ящика, в каждый из этих двух поставим еще по два ящика, в каждый из этих четырех поставим еще по два ящика и т.д. Через n таких шагов получаем 2^n маленьких ящиков. В каждый из них кладем по монете орлом

или решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть одновременно все монеты в каком-либо ящике (любого размера).

а) Докажите, что не более чем за n операций можно уравнивать число монет, лежащих орлом вверх, с числом монет, лежащих решкой вверх.

б) За какое наименьшее число операций можно (при произвольном начальном расположении монет) добиться того, чтобы все монеты лежали орлом вверх?

252. В круглой гостиной замка развешаны портреты всех его прежних владельцев. Слуге разрешается менять местами любые два соседних портрета, кроме портретов отца и сына. Докажите, что он может перевесить портреты в произвольном заданном порядке (расположения портретов, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми).

253°. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 1965$. Разрешается стереть любые два числа, записав вместо них модуль их разности. Докажите, что нельзя добиться того, чтобы на доске остался ноль.

254. В n стаканах достаточно большой вместимости налито поровну воды ($n > 1$). Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько в нем уже имеется. При каких n можно за некоторое число таких переливаний слить всю воду в один стакан?

255*. По окружности написаны в произвольном порядке несколько плюсов и минусов – всего n штук. Затем в промежутках между одинаковыми знаками пишутся плюсы, между разными – минусы, а первоначальные знаки стираются; с новым набором продельвается то же самое и т.д.

а) Докажите, что если $n = 2^k$ (k – натуральное число), то из произвольного набора плюсов и минусов в конце концов получится набор из одних плюсов.

б) Докажите, что если n нечетно и есть хотя бы один плюс и хотя бы один минус, никогда не получится набор из одних плюсов.

в) Выясните, из каких первоначальных наборов в конце концов получится набор из одних плюсов, если n не является степенью двойки.

256.** Дано 2^n целых чисел a_1, a_2, \dots, a_{2^n} . Составляется ряд модулей попарных разностей

$$|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, \dots, |a_{2^n-1} - a_{2^n}|, |a_{2^n} - a_1|.$$

С полученными числами продельвается то же самое и т.д.

Докажите, что через несколько шагов получится ряд, составленный из одних нулей.

Бесконечные множества

257. Докажите, что в любой возрастающей бесконечной арифметической прогрессии найдется член, десятичная запись которого начинается с цифры 1.

258. Разбейте множество натуральных чисел на два подмножества, так чтобы ни одно из них не содержало бесконечную арифметическую прогрессию.

259*. Все наборы (любой конечной длины) из цифр 0 и 1 каким-то образом разбиты на два класса. Докажите, что любую бесконечную последовательность цифр 0 и 1 можно разрезать на такие куски, что все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежат одному классу.

260*. Докажите, что из 11 любых бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе разрядов.

Графы, комбинаторика

261. а°) Докажите, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых между собой, либо трое попарно не знакомых.

б) 17 математиков из разных стран переписываются друг с другом. Каждые два переписываются на одном из трех языков: английском, французском или русском. Докажите, что найдутся три математика, которые переписываются на одном и том же языке.

262. Среди девяти мушкетеров некоторые поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Докажите, что если среди них нет трех, которые должны драться друг с другом, то среди мушкетеров найдутся четверо друзей.

263*. В шахматном турнире участвуют 11 человек. В настоящее время среди любых трех двое еще не сыграли друг с другом. Докажите, что сыграно не более 30 партий.

264*. В некоторой стране между любыми городами имеется непосредственное железнодорожное сообщение только в одном направлении (т.е. для любых двух городов X и Y имеет место одно из двух: или можно проехать из X в Y , или из Y в X). Из каждого города можно выехать в какой-нибудь другой. Назовем город «легко доступным», если из любого другого города можно попасть в него либо непосредственно, либо через один промежу-

точный город. Докажите, что существуют не менее трех легко доступных городов.

265. При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более $n - 1$ врагов. Докажите, что Мерлин – советник короля Артура – может рассадить рыцарей за круглым столом, так что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

266. В народной дружине 100 человек, и каждый вечер на дежурство выходят трое. Докажите, что нельзя составить график дежурств так, чтобы любые два человека дежурили вместе ровно один раз.

267. Составьте отряду дружинников такое расписание дежурств на неделю, чтобы каждый день на дежурство выходили трое и каждые двое дежурили вместе ровно один раз. Сколько человек должно быть в таком отряде? Сколько раз должен дежурить каждый из них? (Сравните эту задачу с задачей 87.)

268. Некая комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на заседании присутствовало 10 человек, причем никакие двое из членов комиссии не встречались на ее заседаниях более одного раза. Докажите, что число членов комиссии больше 60.

Турниры

269. В турнире участвуют 10 шахматистов, причем каждые двое участников встречаются по одному разу. Могут ли какие-нибудь три шахматиста набрать на четыре очка больше, чем остальные семеро?

270. Пять пенсионеров решили провести турнир в домино, так чтобы каждые двое из них были один раз партнерами и два раза – противниками (каждую партию играют двое на двое). Сколько партий они должны сыграть? Сколько существует различных расписаний такого турнира (составить расписание – значит указать, какие пары из пяти пенсионеров $A, B, V, Г, Д$ должны играть между собой)?

271. Шесть шахматистов $A, Б, В, Г, Д$ и $Е$ сыграли в турнире по одной партии. Шахматист A проиграл только победителю и занявшему последнее место, $Б$ выиграл три партии, $В$ сыграл все партии вничью, $Г$ опередил $Д$ на полтора очка, $Е$ выиграл у $Д$ и сыграл вничью с победителем турнира. Кто сколько очков набрал?

272. В футбольном турнире участвовали пять команд, которые мы будем обозначать по номерам занятых ими мест: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Определите, как закончилась каждая игра, если известно, что каждые две команды встречались один раз,

причем команда A_1 ни разу не сыграла вничью, A_2 не проиграла ни одного матча, A_4 не выиграла ни одного матча (за победу команда получала 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков).

Принцип Дирихле

273°. В розыгрыше первенства по футболу в Австралии каждые две команды встречаются один раз. Докажите, что в любой момент состязаний найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей.

274°. Докажите, что из $n + 1$ целых чисел можно выбрать два, разность которых делится на n .

275. Докажите, что для каждого натурального числа n существует число вида

$$11\dots1100\dots00$$

(с некоторым числом нулей и с некоторым числом единиц), делящееся на n .

276. Докажите, что из $n + 1$ чисел, меньших $2n$, всегда можно выбрать два, отношение которых – степень двойки.

277. а) Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из первых 100 натуральных чисел так, чтобы ни одно из них не было в 2 раза больше другого?

б) Сколькими способами это можно сделать?

278. а) Докажите, что из $n + 1$ чисел, меньших $2n$, всегда можно выбрать три числа, из которых одно равно сумме двух других.

б) Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < \dots < a_k < n$. Докажите, что если $k > \frac{n+1}{2}$, то среди чисел a_1, a_2, \dots, a_k можно найти три, одно из которых равно сумме двух других.

279. Числа от 1 до $2n$ выписаны в ряд в произвольном порядке и под каждым числом написан его номер в этом ряду. Затем каждое число складывается со своим номером. Докажите, что среди этих сумм найдутся две, разность которых делится на $2n$.

280*. Имеется неограниченное число белых и черных кубиков. Нужно построить из них (снизу вверх) сплошную башню конечной высоты в форме прямоугольного параллелепипеда, так чтобы каждый черный кубик в башне граничил с четным числом белых, а каждый белый – с нечетным числом черных. Докажите, что при любом заданном нижнем слое такую башню построить можно.

281*. 2^n натуральных чисел выписаны в ряд. Известно, что если выписать все простые множители всех этих чисел, то среди них будет не более n различных. Докажите, что из данного ряда можно выбрать несколько стоящих подряд чисел, так что их произведение будет точным квадратом.

282*. Даны 20 различных положительных целых чисел, таких что самое большое из них не превосходит 70. Докажите, что среди всевозможных попарных разностей этих чисел имеется по крайней мере четыре равных.

Количество информации

283. Заданы несколько натуральных чисел, из которых ни одно не является началом другого. Пусть K_n – количество заданных чисел с n цифрами. Докажите, что

$$\frac{K_1}{10^1} + \frac{K_2}{10^2} + \dots + \frac{K_n}{10^n} + \dots \leq \frac{9}{10}.$$

(Мы говорим, что натуральное число a является началом числа b , если $a = b$ или если к a можно дописать справа несколько цифр так, что получится b .)

284*. В марсианском алфавите всего две буквы: А и Б. Каждые два слова одинаковой длины отличаются по крайней мере в трех местах. Докажите, что слов длины n не более чем $\frac{2^n}{n+1}$.

285. В выражении $x_1 : x_2 : \dots : x_n$ для указания порядка, в котором нужно выполнять деление, расставляются скобки и результат записывается в виде такой дроби:

$$\frac{x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_k}}{x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot \dots \cdot x_{j_{n-k}}}$$

(каждое из чисел x_1, \dots, x_n стоит или в числителе, или в знаменателе этой дроби). Сколько различных дробей такого вида можно получить из данного выражения, по-разному расставляя в нем скобки?

286°. В алфавите некоторого африканского языка n букв. Чтобы передавать телеграммы на этом языке, нужно составить «азбуку Морзе», т.е. каждой букве поставить в соответствие некоторую последовательность точек и тире. Докажите, что обязательно найдется такая буква, для которой соответствующая последовательность точек и тире состоит не менее чем из $\log_2 n - 1$ знаков.

287°. а) Известно, что среди 80 монет есть одна фальшивая – более легкая, чем остальные. Каким наименьшим числом взвешиваний на рычажных весах без гирь можно выделить фальшивую монету? б) Та же задача – для n монет.

288. Имеется пять грузиков разной массы и рычажные весы без гирь. Расположите грузики по возрастанию массы, выполнив семь взвешиваний.

289*. Из набора гирь массами 1, 2, 3, ..., 26 г выделите шесть гирь, так чтобы из них нельзя было выбрать два набора одинаковой массы. Докажите, что нельзя выбрать семь гирь, обладающих тем же свойством.

290*. Из 19 шаров два радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Докажите, что за восемь проверок всегда можно выделить оба радиоактивных шара.

291*. Из 11 шаров два радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Докажите, что менее чем за семь проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров.

292. Имеется 10 мешков монет. В девяти мешках монеты настоящие (массой 10 г), а в одном мешке – фальшивые (массой 11 г). Одним взвешиванием на весах со стрелкой, указывающей разность масс, находящихся на правой и на левой чашках, определите, в каком мешке фальшивые монеты.

293. Имеется 11 мешков, в каждом из которых находится достаточно большое количество монет, и весы со стрелкой, указывающей разность масс, находящихся на правой и на левой чашках. Каково наименьшее число взвешиваний, за которое можно выделить мешок с фальшивыми монетами? Известно только, что фальшивые монеты отличаются по весу от настоящих.

Таблицы

294. В каждую клетку таблицы 10×10 требуется вписать одно из чисел 1 или -1 , так чтобы произведение всех чисел в каждой строке и в каждом столбце было равно 1. Сколькими способами можно заполнить таблицу?

295. В клетки таблицы 10×10 требуется вписать натуральные числа от 1 до 100, так чтобы числа в каждой строке и в каждом столбце образовывали арифметическую прогрессию.

Сколькими способами это можно сделать?

296. Заполните клетки таблицы 4×4 , так чтобы числа в каждом столбце и в каждой строке образовывали геометрическую прогрессию (рис.2).

9			
			4
		16	
	18		

Рис.2

297. В клетки квадратной таблицы $n \times n$ записаны числа, причем известно, что сумма $2n - 1$ чисел, составляющих произвольный крест (т.е. заполняющих некоторую строку и некоторый столбец) равна 0. Докажите, что все числа в таблице равны 0.

298*. На клетчатой доске 11×11 отмечены 22 клетки, так что на каждой горизонтали отмечены ровно две клетки. Два расположения клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

299*. В каждой клетке квадратной таблицы $n \times n$ стоит целое неотрицательное число. При этом, если на пересечении столбца и строки стоит 0, то сумма чисел в этом столбце и в этой строке вместе не меньше n . Докажите, что сумма всех чисел в таблице не меньше $\frac{n^2}{2}$.

300. Все стороны правильного треугольника разбиты на n равных частей и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Затем в каждой из получившихся маленьких треугольников записывают одно из чисел 1 или -1 , так чтобы произведение числа в каждом треугольнике на все числа в треугольниках, имеющих с ним общую сторону, равнялось 1.

а) Докажите, что в углах треугольника должны стоять равные числа.

б) Сколькими разными способами можно заполнить таким образом нашу треугольную таблицу?

Игры

301. Имеется доска 3×3 и девять карточек размером в одну клетку, на которых написаны какие-то числа. Двое играющих поочередно кладут по одной карточке на клетки доски. После того как все карточки разложены, первый (начинающий) подсчитывает сумму шести чисел, стоящих в верхней и нижней строках, второй подсчитывает сумму в ле-

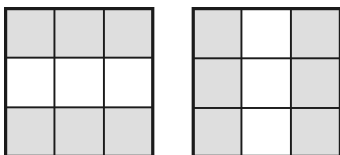


Рис.3

вом и правом столбцах (рис.3). Выигрывает тот, у кого сумма больше. Докажите, что при правильной игре первого игрока второй не сможет выиграть, независимо от того, какие числа написаны на карточках.

302°. Двое играют в такую игру: первый называет произвольное число от 1 до 10, второй прибавляет к нему одно из чисел от 1 до 10 и называет сумму, затем первый снова прибавляет к этой сумме одно из чисел от 1 до 10 и называет новую сумму и т. д. Выигрывает тот, кто первым назовет 100. Докажите, что в этой игре начинающий может обеспечить себе выигрыш.

303. Имеется две кучки по n спичек. Два игрока поочередно берут любое количество спичек из одной из кучек, не обязательно всякий раз из одной и той же. Запрещается оставлять в обеих кучках равное число спичек, за исключением того случая, когда в одной кучке спичек уже нет. Выигрывает тот, кто заберет весь остаток. Как надо играть, чтобы выиграть?

304. Двое играют в такую игру: из кучки, где имеется 25 спичек, берут по очереди одну, две или три спички. Выигрывает тот, у кого в конце будет четное число спичек. Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или его противник?

305.** На доске написаны двадцать чисел: 1, 2, 3, ..., 19, 20. Двое играющих по очереди ставят перед этими числами знаки + или -. (Знак можно ставить перед любым еще не использованным числом.) Первый стремится к тому, чтобы полученная после расстановки всех двадцати знаков сумма была как можно меньше по модулю. Какую наибольшую по модулю сумму может обеспечить себе второй?

Карточки с числами

306*. Даны двадцать карточек, на каждой из которых написана одна цифра 0, 1, 2, ..., 9, причем каждая цифра написана на двух карточках. Можно ли расположить эти карточки в ряд так, чтобы нули стояли рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, между двойками – две, и так далее до девяток, между которыми должно лежать девять карточек (рис.4)?

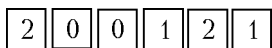


Рис.4

307. а) По кругу выписаны p плюсов и q минусов, a – число пар рядом

стоящих плюсов, b – число пар рядом стоящих минусов. Докажите, что $p - q = a - b$.

б) Каждое из чисел x_1, x_2, \dots, x_m равно либо $+1$, либо -1 . Известно, что $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{m-1}x_m + x_mx_1 = 0$. Докажите, что m делится на 4.

308. Найдите все десятизначные числа, у которых первая цифра равна количеству нулей в числе, вторая – количеству единиц, и т.д., десятая – количеству девяток.

309. a – число большее 2. Некто пишет на карточках числа a, a^2, a^3, \dots, a^n (каждое число на одной карточке). Потом часть карточек он кладет себе в правый карман, часть – в левый, а остальные выбрасывает. Докажите, что сумма чисел в правом кармане не может быть равна сумме чисел в левом.

310. В автобусе без кондуктора ехали $4n$ пассажиров, у которых были только монеты в 10, 15 и 20 копеек. Известно, что каждый пассажир, тем не менее, смог заплатить за проезд и получить сдачу. Докажите, что наименьшее общее число монет, которое могло быть у всех пассажиров, равно $5n$. (Стоимость проезда в автобусе – 5 коп.)

Несколько теорем

311. Дано 50 различных положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_{50} . Как их надо занумеровать, чтобы величина $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{50} - a_1|$ была наибольшей?

312*. На кольцевой автомобильной дороге стоят n одинаковых автомашин. Общее количество бензина у всех этих машин достаточно для того, чтобы одна из них смогла проехать по всей кольцевой дороге. Докажите, что хотя бы одна из этих автомашин может, забирая по пути бензин у остальных автомашин, проехать по всей кольцевой дороге.

313*. $n^2 + 1$ различных чисел выписаны в ряд. Докажите, что можно выбрать $n + 1$ из этих чисел, так что они будут расположены в порядке возрастания или в порядке убывания.

314*. В школе работают несколько кружков. Известно, что для любых k кружков ($k = 1, 2, \dots$) количество ребят, которые пришли бы на совместное занятие этих кружков, не меньше k . Докажите, что можно выбрать в каждом кружке старосту, так чтобы никто не был старостой сразу двух кружков.

315. Площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки, нарисованного на клетчатой бумаге, равна $j + \frac{r}{2} - 1$, где j –

число узлов, лежащих на его сторонах и в вершинах (узлами сетки мы называем точки, где пересекаются линии сетки; сторона клетки принята за 1).

Докажите эту формулу:

а) для прямоугольника $m \times n$ клеток, у которого стороны идут по линиям сетки;

б) для прямоугольной трапеции, у которой основания и одна боковая сторона идут по линиям сетки;

в) для произвольного выпуклого многоугольника.

Задачи на клетчатой бумаге

316. Прямоугольник со сторонами m и n нарисован на клетчатой бумаге, так что его стороны проходят по линиям сетки. Сколько клеток пересекает диагональ этого прямоугольника?

317*. Докажите, что шахматный конь не может обойти доску $4 \times n$, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходную клетку (n – любое натуральное число).

318. Докажите, что каждое целое неотрицательное число можно и притом единственным образом представить в виде

$$\frac{(x + y)^2 + 3x + y}{2},$$

где x и y – целые неотрицательные числа.

319. В городе 10 улиц параллельны и 10 других пересекают их под прямым углом. Какое наименьшее число поворотов может иметь замкнутый маршрут, проходящий через все перекрестки?

320. Какое наибольшее число веревочек, соединяющих соседние узлы волейбольной сетки $m \times n$ с квадратными ячейками, можно разорвать так, чтобы сетка не распалась на куски?

321*. На клетчатой бумаге начерчена замкнутая ломаная линия, все звенья которой равны и все вершины которой лежат в узлах клетчатой бумаги. Докажите, что число звеньев такой ломаной обязательно четно.

322*. На плоскости нарисована сетка, образованная из правильных шестиугольников со стороной 1 (соты). Жук прополз, двигаясь по линиям сетки, из узла A в узел B по кратчайшему пути, длина которого равна 100 (рис.5). Докажите, что половину пути он полз в одном направлении.

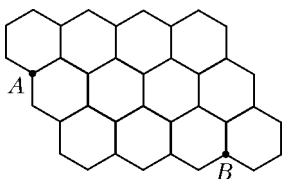


Рис. 5

Расположение точек и фигур

323. Белую плоскость испачкали черной краской (тем самым все точки плоскости разбиты на два непустых множества – «черные» и «белые»).

а) Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1966 м.

б) Докажите, что найдутся две точки разного цвета, расстояние между которыми равно 1966 м.

324. Найдите все числа, которые можно поставить на место многоточия, чтобы следующая задача имела единственное решение: «На плоскости расположены несколько прямых, причем известно, что они пересекаются ровно в ... точках. Найдите число прямых».

325. Город состоит из 50 кварталов, каждый из которых имеет периметр 600 м. По внешним сторонам кварталов проходит кольцевое шоссе. Турист обошел город по этому шоссе за полтора часа и прочел в справочнике, что суммарная длина всех улиц города, не считая шоссе, составляет 12 км. С какой скоростью шел турист?

326. Докажите, что при $n \geq 5$ данный прямоугольник можно разбить на n прямоугольников, так чтобы никакие два соседних прямоугольника разбиения не образовывали вместе прямоугольника.

327*. Докажите, что семь прямых и семь точек нельзя расположить на плоскости так, чтобы через каждую точку проходили ровно три прямые и на каждой прямой лежали ровно три точки.

328*. Докажите, что из куска проволоки длиной 120 см нельзя, не разламывая его, сделать каркас куба с ребром длиной 10 см.

329. Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу пешком. Поужинав в кафе на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал, и при этом идти только по тем улицам, по которым он шел до этого нечетное число раз. Докажите, что он сможет это сделать.

330. В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из каждого города можно проехать в любой другой, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

331. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость четыре окружности? n окружностей?

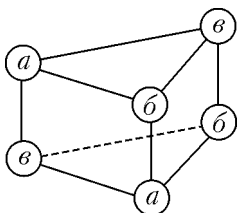


Рис. 6

332. Какое наименьшее количество различных букв достаточно расставить в вершинах n -угольной призмы, чтобы в концах каждого ребра стояли разные буквы (рис. 6)? Тот же вопрос для n -угольной пирамиды.

333. Стороны выпуклого n -угольника последовательно пронумерованы числами от 1 до n . Внутри этого n -угольника берется точка и соединяется с каждой вершиной отрезком. Нужно пронумеровать эти отрезки числами от 1 до n , так чтобы сумма номеров сторон для всех n треугольников, на которые разбит многоугольник, была одна и та же. Докажите, что это можно сделать тогда и только тогда, когда нечетно.

334. На окружности даны 1966 точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{1966}$. Составляются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, для которых точка A_1 является вершиной, или тех, для которых она вершиной не является?

335. Окружность покрыта несколькими дугами. Эти дуги могут накладываться друг на друга, но ни одна из них не покрывает окружность целиком. Докажите, что всегда можно выбрать несколько из этих дуг, так чтобы они тоже покрывали всю окружность и в сумме составляли не больше 720° .

336. Из точки O на плоскости проведены несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Докажите, что можно выбрать несколько векторов, так что длина их суммы больше 1.

337. а) Требуется построить замкнутую самопересекающуюся ломаную линию, которая каждое свое звено пересекает один раз. Докажите, что такая ломаная обязательно имеет четное число звеньев. Для четных $n \geq 6$ постройте примеры.

б) Докажите, что для любого нечетного $n \geq 5$ существует самопересекающаяся замкнутая ломаная линия из n звеньев, которая пересекает каждое свое звено ровно два раза.

338. В лесу, имеющем форму выпуклой фигуры площади S , заблудился человек. Докажите, что он сможет выйти из леса, пройдя путь, не больший чем $\sqrt{2\pi S}$. Другими словами, докажете, что существует линия длины $\sqrt{2\pi S}$, которую нельзя поместить целиком ни в какую выпуклую фигуру площади S .

339. Внутри квадрата отмечены 1965 точек, так что никакие три из этих точек и вершин квадратов не лежат на одной прямой. Провели несколько разрезов, соединяющих эти точки между со-

бой и с вершинами квадратов. Оказалось, что весь квадрат разбит на треугольники, внутри которых нет данных точек. Сколько проведено разрезов и сколько получилось треугольников?

340. На плоскости расположены несколько точек, все расстояния между которыми различны. Каждую точку соединяют отрезком с ближайшей. а) Может ли при этом получиться замкнутый многоугольник? б) Могут ли получиться пересекающиеся отрезки?

341. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

342. В квадрате со стороной 1 выбраны 102 точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого меньше чем 0,01.

343. Можно ли разместить 1963 точки в квадрате со стороной 1 так, чтобы любой прямоугольник, лежащий внутри заданного квадрата, площади $\frac{1}{200}$ и со сторонами, параллельными сторонам квадрата, содержал внутри себя хотя бы одну из этих точек?

344*. В квадрат со стороной 1 бросили 51 точку. Докажите, что некоторые три из этих точек обязательно оказались внутри некоторого круга радиуса $\frac{1}{7}$.

345*. n точек на плоскости расположены так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

346. На плоскости даны 100 точек. Докажите, что их можно заключить в несколько непересекающихся кругов, сумма диаметров которых меньше 100 и расстояние между любыми двумя из которых больше 1. (Расстояние между двумя непересекающимися кругами – это расстояние между их ближайшими точками.)

347. На плоскости отмечены n точек. Известно, что среди любых трех из них имеются две, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что на плоскости можно разместить два круга радиуса 1, которые закроют все эти точки.

348. Можно ли отметить на плоскости 225 точек так, чтобы наибольшее из расстояний между ними было не больше 21, а наименьшее – не меньше 3?

349. n круглых монет радиуса r целиком (не свешиваясь) лежат на круглом столе радиуса R без наложений, так что

больше нельзя положить ни одной монеты. Докажите, что

$$\frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} - 1 \right) < \sqrt{n} \leq \frac{R}{r}.$$

Движение и преследование

350. По прямолинейному желобу длиной 1 м, закрытому с обоих концов, катаются 100 маленьких абсолютно упругих шариков. Скорость каждого шарика – 100 м/с. Сколько будет столкновений в течение одной секунды? (Трением пренебречь; шарики считать точками, двигающимися по одной прямой, начальное расположение которых не задано.)

351. По аллее длиной 100 м прогуливаются три джентльмена. Первый ходит со скоростью 1 км/ч; второй – со скоростью 2 км/ч, третий – со скоростью 3 км/ч. Дойдя до конца аллеи, каждый поворачивается и идет с прежней скоростью в обратном направлении. Докажите, что можно выбрать такой промежуток времени продолжительностью в одну минуту, в течение которого все трое будут идти в одном и том же направлении.

352. По четырем прямым дорогам, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, равномерно каждый со своей скоростью идут четыре пешехода. Известно, что первый пешеход встретится со вторым, с третьим и с четвертым, а второй – с третьим и с четвертым. Докажите, что третий и четвертый пешеходы тоже встретятся друг с другом.

353. Улитка ползла с непостоянной скоростью. В течение шести минут несколько человек наблюдали за ней, так что ни в какой момент она не была без наблюдения. Каждый наблюдал ровно одну минуту и обнаружил, что за эту минуту улитка проползла ровно 1 м. Докажите, что за все шесть минут улитка могла проползти самое большее 10 м.

354. Самолет-разведчик летает по кругу с центром в точке A . Радиус круга – 10 км, скорость самолета – 1000 км/ч. В некоторый момент из точки A стартует ракета, которая имеет ту же скорость, что и самолет, и управляется так, что она все время находится на прямой, соединяющей самолет с точкой A . Через какое время ракета достигнет самолета?

355*. Между двумя параллельными дорогами, находящимися на расстоянии $3a$ друг от друга, стоит бесконечный ряд одинаковых домиков размером $a \times a$ на расстоянии $2a$ один от другого (рис. 7). По одной из дорог с постоянной скоростью v и интервалом $9a$ движется колонна полицейских. В тот момент, когда один из полицейских находится напротив одного из домиков (в точке A),

по другую сторону от этого домика на второй дороге (в точке B) появляется гангстер. С какой постоянной скоростью и в каком направлении должен идти гангстер по своей дороге, чтобы скрываться от полицейских за домами?

356*. На маленьком острове стоит прожектор, луч которого освещает некоторый отрезок поверхности моря, начинающийся у острова. Прожектор равномерно вращается вокруг вертикальной оси, так что конец его луча перемещается со скоростью v . Докажите, что катер, развивающий максимальную скорость $\frac{v}{8}$, не сможет незаметно (не попадая в луч прожектора) подойти к острову.

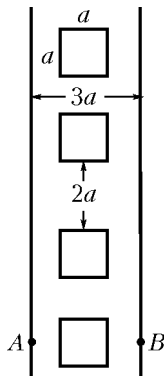


Рис. 7

357*. К непрозрачной планете, имеющей форму шара, подлетает космический корабль, который может летать со скоростью v . Единственный житель планеты может передвигаться по ее поверхности со скоростью не более u . Докажите, что если $\frac{v}{u} > 10$, то корабль сможет обнаружить жителя, как бы тот ни пытался скрыться.

358. Ученик плавает в круглом бассейне. На краю бассейна стоит учитель, который не умеет плавать, но бегает в четыре раза быстрее, чем плавает ученик. Сможет ли ученик убежать от учителя, если он бегает быстрее, чем учитель?

359*. Из любой точки города в любую другую можно попасть, не проходя через любой наперед заданный перекресток. Докажите, что с любого перекрестка на любой другой ведут по крайней мере два не пересекающихся пути. (Предполагается, что в городе больше двух перекрестков.)

360*. С невыпуклым многоугольником проделываются следующие операции: если A и B — две его не соседние вершины и многоугольник лежит по одну сторону от прямой AB , то часть контура, лежащая между точками A и B , симметрично отражается относительно

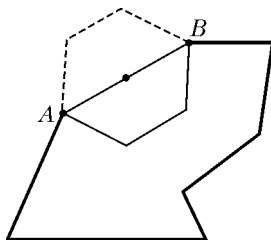


Рис. 8

но середины отрезка AB (рис. 8). Докажите, что через конечное число таких операций многоугольник превратится в выпуклый.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Задачи на построение

361. Разделите угол в 19° на 19 равных частей с помощью циркуля и линейки.

362. Разделите угол в $\frac{\pi}{7}$ на 3 равные части с помощью циркуля и линейки.

363. Постройте треугольник, если дана прямая, на которой лежит основание, и даны две точки, являющиеся основаниями высот, опущенных на боковые стороны.

364. Постройте треугольник, зная положение одной из его вершин, середины противоположной стороны и точки пересечения высот.

365. Даны прямая и две точки, лежащие по одну сторону от этой прямой. Постройте треугольник, основание которого лежит на данной прямой, а данные точки являются ортоцентром (точкой пересечения высот) и центром тяжести (точкой пересечения медиан).

366. Постройте треугольник, если известны длина медианы, проведенной к одной из его сторон, и длины высот, проведенных к двум другим сторонам.

367. Даны прямая и две точки, лежащие по разные стороны от прямой. Постройте треугольник, для которого данные точки были бы основаниями высот, а третья высота лежала бы на данной прямой.

368. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и медиане, проведенной к одному из катетов.

369. На доске была начерчена трапеция, в ней была проведена средняя линия EF и опущен перпендикуляр OK из точки O пересечения диагоналей на большее основание. Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам EF и OK ?

370. На одной из сторон треугольника отмечена точка A . Проведите через нее прямую, так чтобы она разделила площадь треугольника на две равные части.

371. Даны окружность, точка A , лежащая на окружности, и точка M , лежащая внутри окружности. Постройте на окружности точки B и C такие, чтобы точка M была

- а) точкой пересечения медиан треугольника ABC ;
- б) точкой пересечения биссектрис треугольника ABC ;
- в) точкой пересечения высот треугольника ABC .

372. Постройте треугольник по двум высотам, опущенным на две стороны, и биссектрисе, проведенной к третьей стороне.

373. Постройте четырехугольник по длинам его сторон, если известно, что его можно вписать в окружность.

374. На окружности отмечены три точки. Найдите на окружности четвертую точку, такую чтобы в четырехугольник с вершинами в этих точках можно было вписать окружность.

375. Даны окружность и внутри нее две точки A и B . Постройте вписанный в окружность прямоугольный треугольник, катеты которого проходят через точки A и B .

376. Постройте параллелограмм, две вершины которого лежат на одной данной окружности, две другие – на другой данной окружности, а точка пересечения диагоналей находится в данной точке.

377. На окружности даны точки A и B . Проведите хорду XU , так чтобы отношение $AX : AU$ и разность углов XAB и YAB имели заданные значения.

378. Через точки A и B проведите окружность, которая пересекла бы две данные параллельные прямые в точках E и F , так чтобы $EF = AB$ (рис.9).

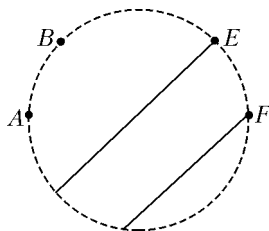


Рис. 9

379. В данную окружность впишите трапецию, если известна длина ее боковой стороны и расстояние от центра до точки пересечения диагоналей.

Геометрические места точек

380. На плоскости нарисован квадрат. Найдите геометрическое место точек, таких что расстояния от каждой из них до прямых, содержащих стороны квадрата, взятые в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию.

381. По внутренней стороне окружности катится окружность вдвое меньшего радиуса (рис.10). На меньшей окружности отмечена точка A . По какой траектории она движется?

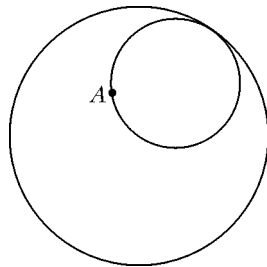


Рис. 10

382. Дан равносторонний треугольник ABC . Найдите геометрическое мес-

то точек M таких, что треугольники ABM и ACM оба равнобедренные.

383. Из данной точки M квадратного бильярда выпускается шарик параллельно одной из диагоналей. Найдите геометрическое место точек P на бильярде таких, что шарик, выпущенный из точки P одновременно с первым шариком со скоростью равной по величине и направлению скорости первого, столкнется с ним.

Неравенства и экстремумы

384. Дана окружность и на ней точка A . Произвольная окружность с центром A пересекается с данной окружностью в точках K и P и касается диаметра данной окружности в точке H (рис.11). Найдите геометрическое место точек пересечения отрезков KP и AH .

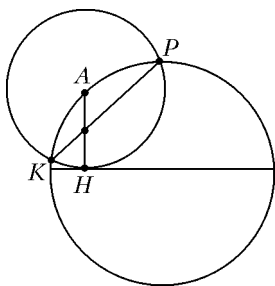


Рис. 11

385. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Докажите, что

- $AB + CD < AC + BD$;
- если $AB + BD \leq AC + CD$, то $AB < AC$.

386. Могут ли все высоты треугольника быть меньше 1 см, а его площадь больше 10000 км^2 ?

387. D и E – середины сторон AB и BC треугольника ABC . Точка M лежит на стороне AC . Докажите, что если $MD < AD$, то $ME > CE$.

388. Даны три точки A, B, C . Где нужно выбрать точку M , чтобы сумма радиусов окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM , была наименьшей?

389. На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC отложен отрезок $CD = BC$. Докажите, что угол ABD – тупой.

390. Докажите, что выпуклый четырехугольник, имеющий ось симметрии, является либо вписанным в окружность, либо описанным около окружности.

391. В четырехугольнике три тупых угла. Докажите, что из двух его диагоналей большей является та, которая проведена из вершины острого угла.

392. Докажите, что круги, построенные на сторонах произвольного четырехугольника как на диаметрах, целиком его покрывают.

393. Докажите, что площадь квадрата, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади этого треугольника.

394. Двумя отрезками длины 1 отрежьте от данного угла четырехугольник наибольшей площади (рис.12).

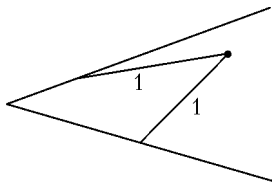


Рис. 12

395. Внутри окружности с центром в точке O дана точка A , отличная от O . Найдите на окружности точку M , для которой угол AMO максимален.

396. Какую наименьшую ширину должна иметь бесконечная полоса бумаги, чтобы из нее можно было вырезать любой треугольник площади 1?

397. На плоскости даны точки A и B . Постройте квадрат, у которого сумма расстояний от вершин до точки A была бы минимальной, а точки A и B лежали бы на его границе.

398. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC найдите точку M , для которой треугольник MCK (K – проекция точки M на катет BC) имеет наибольшую площадь.

399. В остроугольном треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M . Постройте треугольник MPK минимального периметра, так чтобы точка P лежала на стороне AB , а точка K – на стороне CA .

400. Дан треугольник, длины сторон которого различны. Найдите на плоскости точку, сумма расстояний от которой до сторон треугольника была бы минимальной.

401. Дан треугольник ABC . На продолжении сторон AB и AC за вершины B и C отмечены точки B' и C' , такие что

$$BB' + CC' = BC$$

(рис.13). Для каких положений точек B' и C' длина отрезка $B'C'$ будет наименьшей?

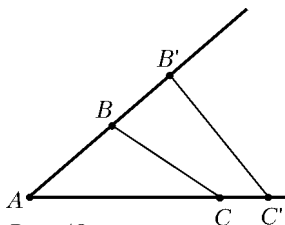


Рис. 13

402. Даны две concentric окружности. Через точку, лежащую внутри меньшей из них, проведите луч, так чтобы длина его отрезка, заключенного между окружностями, была а) наименьшей; б) наибольшей.

403. В произвольном выпуклом четырехугольнике найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин была бы наименьшей.

404. Через точку, лежащую внутри данного угла, проведите

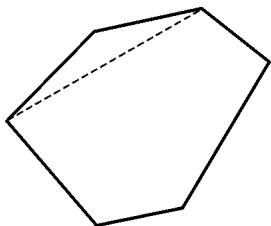


Рис. 14

прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

405. В данный прямоугольник поместите ромб наибольшей площади.

406. Докажите, что в любом выпуклом шестиугольнике найдется диагональ, которая отсекает от него треугольник площади не большей, чем одна шестая площади шестиугольника (рис.14).

Задачи на вычисление

407. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении 1:3. Вычислите углы треугольника.

408. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) угол ABC равен 80° . Внутри треугольника взята точка O так, что угол OAC равен 10° , а угол OCA равен 30° (рис.15). Найдите величину угла AOB .

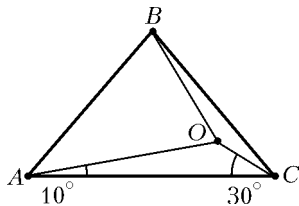


Рис. 15

409. Найдите величину угла C треугольника ABC , если расстояние от вершины C до ортоцентра треугольника равно радиусу описанной окружности.

410. Определите величины углов треугольника, если центры его вписанной и описанной окружностей симметричны относительно основания этого треугольника.

411. Высоты треугольника пересекаются в точке H . Известно, что $CH = AB$. Найдите величину угла треугольника при вершине C .

412. Дан треугольник ABC , у которого угол A вдвое больше угла B , а сторона AB вдвое больше стороны AC . На стороне AB отмечена точка E такая, что $AE = AC$. Найдите длину отрезка CE , если $AC = 1$.

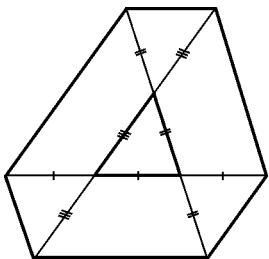


Рис. 16

413. Треугольник и вписанный в него ромб имеют общий угол. Отношение сторон треугольника, образующих этот угол, равно k . Найдите отношение площадей треугольника и ромба.

414. На каждой из прямых, содержащих стороны треугольника, отло-

жим в обе стороны от вершин по отрезку, равному длине стороны треугольника, лежащей на этой прямой, получим шесть точек (рис.16). Соединим их так, чтобы получился выпуклый шестиугольник. Выразите площадь полученного шестиугольника через площадь S исходного треугольника.

415. Даны два смежных прямых угла с вершиной в точке O (рис.17). В один из них вписана окружность радиуса r , а в другой – окружность радиуса R ($R > r$). Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает стороны углов в точках A и B . Определите площадь треугольника AOB .

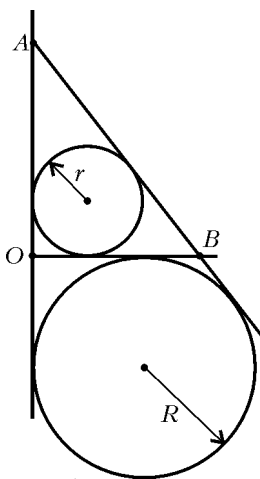


Рис. 17

416. Стороны AB , BC и CA треугольника ABC разделены точками C' , A' и B' в одном и том же отношении k (рис.18). Найдите k , если прямые AA' , BB' и CC' ограничивают треугольник, площадь которого составляет $\frac{1}{4}$ площади данного.

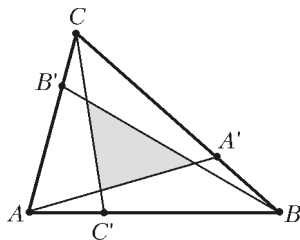


Рис. 18

417. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты, расположенные вне треугольника. Вычислите площадь шестиугольника, образованного теми вершинами квадратов, которые не являются вершинами треугольника, если известны гипотенуза c и сумма s катетов треугольника.

418. Из двух углов треугольника один в два раза больше другого. Найдите стороны треугольника, зная, что они выражаются целыми числами.

419. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника (рис.19). Известно, что площади этих треугольников выражаются целыми числами. Докажите, что произведение этих четырех чисел не

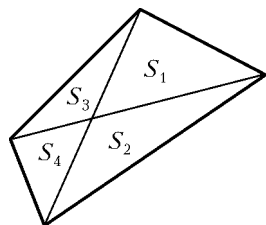


Рис. 19

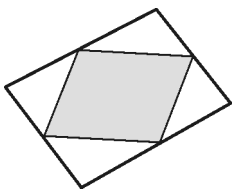


Рис. 20

Выразите площадь полученного четырехугольника через площадь данного.

может оканчиваться цифрами ...1965.

420. В треугольнике ABC с углом 120° при вершине C проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 и CC_1 . Найдите величину угла $A_1B_1C_1$.

421. Дан выпуклый четырехугольник. Середины его сторон последовательно соединены отрезками (рис.20).

Задачи на доказательство: прямые и многоугольники

422. В равносторонний треугольник вписан другой равносторонний треугольник, стороны которого перпендикулярны сторонам данного (рис.21). В каком отношении вершины вписанного треугольника делят стороны данного?

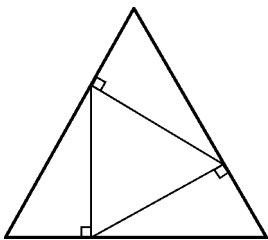


Рис. 21

423. Дан четырехугольник $ABCD$, причем известно, что периметры треугольников ABC , ABD и BCD равны. Докажите, что $ABCD$ – прямоугольник.

424. Докажите, что если площади прямоугольных треугольников относятся как квадраты длин их гипотенуз, то треугольники подобны.

425. Докажите, что если разность между суммой длин двух сторон треугольника и длиной его третьей стороны равна диаметру вписанной окружности, то треугольник прямоугольный.

426. Докажите, что прямая, соединяющая вершину прямого угла прямоугольного треугольника с центром квадрата, построенного на гипотенузе вне треугольника, делит прямой угол пополам (рис.22).

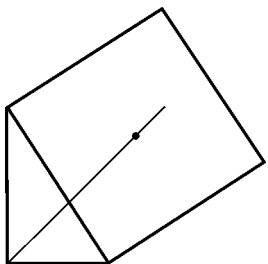


Рис. 22

427. В прямоугольник $ABCD$ вписан равносторонний треугольник APK , так что вершина K находится на стороне BC , а P – на CD (рис.23). В треугольнике APK из вершины K проведена высота KH . Докажите, что треугольник BHC равносторонний.

428. В треугольник ABC вписано три квадрата: у одного две вершины

лежат на стороне AB , у другого – на стороне BC , у третьего – на стороне AC . Оказалось, что все три квадрата равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

429. На двух смежных сторонах параллелограмма вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что третьи вершины этих треугольников и четвертая вершина параллелограмма являются вершинами равностороннего треугольника.

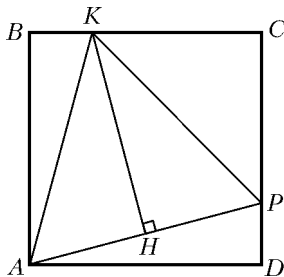


Рис. 23

430. Докажите, что если прямая, проходящая через вершину треугольника, разбивает его на два треугольника, подобных данному, то данный треугольник прямоугольный, а проведенная прямая перпендикулярна гипотенузе.

431. В окружность вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали одной трапеции равны по длине диагоналям другой.

432. Через точку, взятую на продолжении диагонали трапеции, и середины оснований проведены две прямые, пересекающие боковые стороны трапеции в точках K и L (рис.24). Докажите, что отрезок KL параллелен основаниям трапеции.

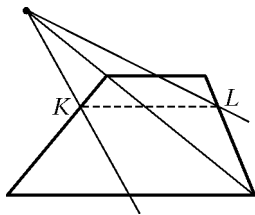


Рис. 24

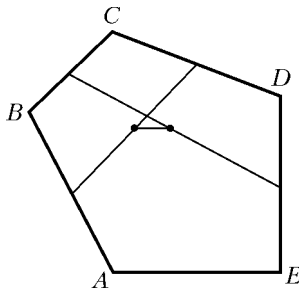


Рис. 25

433. Середины сторон AB и CD , BC и DE выпуклого пятиугольника соединены отрезками. Середины полученных отрезков снова соединены (рис.25). Докажите, что последний отрезок параллелен отрезку AE и равен по длине $\frac{1}{4} AE$.

434. Через точки пересечения двух окружностей проведены две произвольные секущие. Докажите, что хорды, соединяющие другие точки пересечения этих секущих с окружностями, параллельны (рис.26).

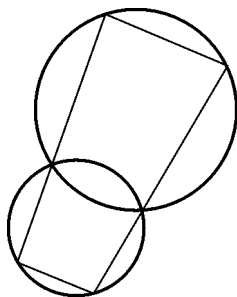


Рис. 26

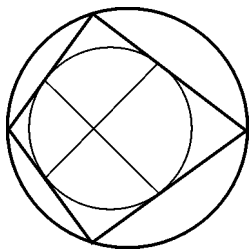


Рис. 27

435. Через середины диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены прямые, параллельные BD и AC соответственно. Точка их пересечения соединена с серединами сторон четырехугольника. Докажите, что этими четырьмя отрезками данный четырехугольник делится на равновеликие части.

436. Некоторый четырехугольник является одновременно вписанным и описанным. Докажите, что прямые, соединяющие противоположные точки касания вписанной окружности, перпендикулярны (рис.27).

Задачи на доказательство: окружности

437. Докажите, что прямые, соединяющие середины дуг стягиваемых противоположащими сторонами вписанного в окружность четырехугольника, взаимно перпендикулярны.

438. Соедините все вершины произвольного выпуклого четырехугольника с серединами двух противоположных его сторон. Докажите, что площадь образовавшегося при этом четырехугольника равна сумме площадей двух не примыкающих к нему треугольников.

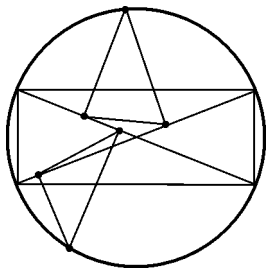


Рис. 28

439. Из произвольной точки окружности, описанной вокруг прямоугольника, опущены перпендикуляры на диагонали прямоугольника или их продолжения (рис.28). Докажите, что расстояние между основаниями перпендикуляров не зависит от положения точки на окружности.

440. Из точки P , лежащей вне данной окружности, проведены касательные PT_1 и PT_2 (T_1 и T_2 — точки

касания). Внутри окружности построена дуга T_1T_2 с центром в точке P (рис. 29). Произвольная точка A этой дуги соединена с точками T_1 и T_2 . Докажите, что точки M_1 и M_2 , в которых прямые AT_1 и AT_2 второй раз пересекают окружность, диаметрально противоположны.

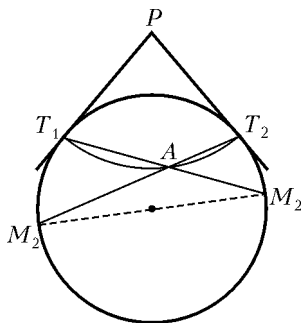


Рис. 29

441. В окружность вписан четырехугольник. Докажите, что для всякой точки этой окружности произведение расстояний до одной пары противоположных сторон четырехугольника равно произведению расстояний до другой пары сторон, а также произведению расстояний до диагоналей.

442. Докажите, что если в трапеции диагонали перпендикулярны, то сумма квадратов длин диагоналей равна квадрату суммы длин оснований.

443. Три окружности проходят через точки A и B . Через точку A проведена произвольная секущая, пересекающая окружности вторично в точках C , D и E (рис. 30). Докажите, что отношение $CD : DE$ не зависит от выбора секущей.

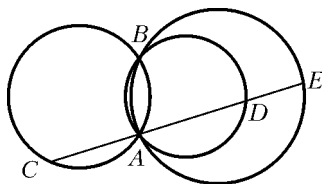


Рис. 30

444. Через некоторую точку M диаметра окружности проведена секущая под углом 45° к диаметру. Пусть A и B – точки пересечения секущей с окружностью. Докажите, что $MA^2 + MB^2$ не зависит от выбора точки M .

445. В окружности проведены три равные хорды AB , BC и CD . Докажите, что диаметр BE отсекает от хорды AD отрезок AF , равный AB , а хорда CE делит отрезок FD пополам.

446°. На луче, проведенном через центр окружности радиуса r , выбраны точки A и B так, что произведение расстояний от них до центра окружности равно r^2 . Докажите, что для любой точки P окружности отношение $AP : BP$ постоянно.

447. Точки K и P симметричны основанию высоты BH треугольника ABC относительно его сторон AB и BC (рис. 31). Докажите, что точки пересечения отрезка KP со сторонами AB и BC или их продолжениями – основания высот треугольника ABC .

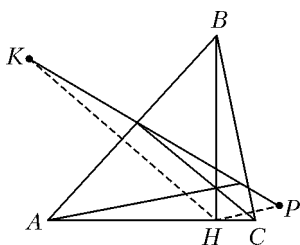


Рис. 31

448. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD . Обозначим через M одну из точек пересечения прямой AC и описанной окружности треугольника BCD (любую). Докажите, что BD — общая внешняя касательная к описанным окружностям треугольников AMB и AMD .

449. Про совокупность равнобедренных треугольников известно, что их основания лежат на данной прямой, они имеют общую вершину A на этой прямой, кроме того, радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны (рис.32). Докажите, что все боковые стороны этих треугольников, не проходящие через вершину A , касаются одной окружности.

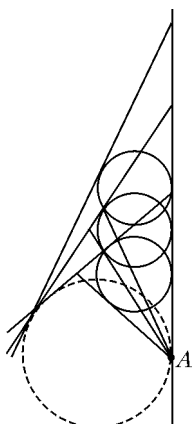


Рис. 32

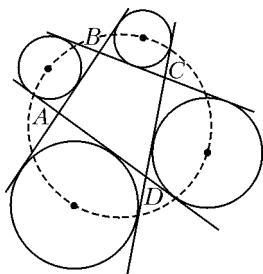


Рис. 33

450. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Построены четыре окружности, каждая из которых касается извне одной стороны и продолжений двух соседних сторон четырехугольника (например, стороны AB и продолжений сторон AD и BC , рис.33). Докажите, что центры этих окружностей лежат на одной окружности.

451. Точки A , B и C лежат на одной прямой, точка P — вне этой прямой. Обозначим через O_1 , O_2 и O_3 центры окружностей, описанных около треугольников PBA , PCA и PBC . Докажите, что точки O_1 , O_2 , O_3 и P лежат на одной окружности.

452. Три окружности α_1 , α_2 и α_3 пересекаются в одной точке O . Точки A , B и C — точки пересечения, соответственно, окружностей α_1 и α_2 , α_2 и α_3 , α_3 и α_1 . Из произвольной точки M окружности α_1 проведены секущие MAP и MCQ (P и

Q – точки, соответственно, на α_2 и α_3). Докажите, что точки P , B и Q лежат на одной прямой.

453. Через вершины C , B и центр вписанной в треугольник ABC окружности проведена окружность с центром в точке M . Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC , и биссектриса угла A проходят через точку M .

454. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка P , а на стороне BC – точка K . На отрезках AK и CP как на диаметрах построены окружности. Докажите, что их общая хорда проходит через точку пересечения высот треугольника ABC .

455. В одном архиве найдена записка с описанием места, где спрятан ящик со старинными рукописями. В записке говорится: «Подойдите к березе и идите от нее до дуба, измеряя расстояние. Около дуба поверните направо и пройдите такое же расстояние. Пусть M – точка остановки. Затем снова от березы идите до каменного столба, от которого пройдете влево такое же расстояние. В результате остановитесь в точке K . В середине отрезка MK закопан ящик с рукописями». Когда историки прибыли на указанное место, то обнаружили, что березы уже нет. Как найти ящик с рукописями?

456. В квадрате расположено несколько одинаковых кругов. Любые два из них не имеют общих точек. Докажите, что можно разрезать квадрат на выпуклые многоугольники так, чтобы каждый многоугольник заключал в себе ровно по одному кругу. Верно ли такое утверждение, если вместо кругов рассматриваются равные между собой треугольники? если радиусы кругов не одинаковы?

457. Торт имеет форму правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Из середины каждой стороны внутрь торта (в произвольном направлении) проводится разрез длины 1. Докажите, что при этом от торта будет отрезан хотя бы один кусок.

Стереометрия

458. В пространстве даны два треугольника ABC и $A'B'C'$, лежащие в разных плоскостях. Найдите геометрическое место точек M , для которых объемы тетраэдров $MABC$ и $MA'B'C'$ равны.

459°. Докажите, что три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

460. Можно ли построить тетраэдр, в котором каждое ребро было бы стороной тупого или прямого плоского угла?

461. Докажите, что для параллелепипеда, у которого нет плоских прямых углов, имеет место одно из двух: или в некоторой вершине сходятся три плоских острых угла, или в некоторой вершине сходятся три плоских тупых угла.

462. Какое наибольшее число ребер правильной n -угольной пирамиды можно пересечь плоскостью? Тот же вопрос для правильной n -угольной призмы.

463. Докажите, что не существует многогранника, имеющего 7 ребер. Постройте пример многогранника, имеющего n ребер, для $n \geq 8$.

464. Некоторая плоскость пересекает все звенья замкнутой ломаной линии $A_1A_2 \dots A_nA_1$ в точках B_1, B_2, \dots, B_n .

Докажите, что

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \dots \cdot \frac{A_nB_n}{B_nA_1} = 1.$$

465. Пространственный четырехугольник описан около сферы (каждая сторона касается сферы). Докажите, что

- а) суммы его противоположных сторон равны;
- б) точки касания сторон со сферой лежат в одной плоскости.

466. а) На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и L соответственно, P – точка пересечения диагонали AC и отрезка KL . Найдите AP/AC , если $\frac{AK}{AB} = \alpha$, $\frac{AL}{AD} = \beta$.

б) На ребрах AA' , AB и AD параллелепипеда $ABCD A'B'C'D'$ взяты точки K , L и M соответственно, P – точка пересечения диагонали AC' с плоскостью KLM . Найдите $\frac{AP}{AC'}$, если $\frac{AK}{AA'} = \alpha$, $\frac{AL}{AB} = \beta$, $\frac{AM}{AD} = \gamma$.

467. Докажите, что следующие свойства тетраэдра¹ равносильны:

- а) его грани – равные остроугольные треугольники;
- б) периметры всех граней равны;
- в) суммы плоских углов при каждой вершине равны 180° ;
- г) центры вписанной и описанной сфер совпадают;
- д) отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, перпендикулярны;
- е*) площади всех граней равны.

¹ Рассматриваемые в этой задаче тетраэдры называются ортогональными.

468. Дана плоскость и две точки A и B вне ее. Найдите геометрическое место точек M на плоскости, для которых отрезки AM и BM составляют с плоскостью одинаковые углы.

469°. а) Докажите, что если любые две из нескольких прямых пространства пересекаются, то либо все прямые лежат в одной плоскости, либо проходят через одну точку.

б) Докажите, что если любые две из нескольких окружностей в пространстве имеют 2 общие точки, то они либо проходят через 2 фиксированные точки, либо лежат в одной плоскости, либо лежат на одной сфере.

470. Докажите, что следующие свойства тетраэдра¹ эквивалентны:

а) его высоты пересекаются в одной точке;

б) противоположные ребра перпендикулярны;

в) суммы квадратов противоположных ребер равны;

г) основанием одной из высот служит ортоцентр грани, на которую высота опущена;

д*) могут ли все грани ортогонального тетраэдра быть тупоугольными треугольниками?

471. Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $1 : 3$, считая от грани.

472°. Докажите, что площадь проекции многоугольника на горизонтальную плоскость равна $S \cos \alpha$, где S – его площадь, α – угол, под которым наклонена его плоскость к горизонтальной плоскости.

473*. Как нужно расположить в пространстве прямоугольный параллелепипед, чтобы площадь его проекции на горизонтальную плоскость была наибольшей?

474*. Докажите, что площадь проекции произвольного тетраэдра на горизонтальную плоскость будет максимальной в одном из следующих 7 положений: или одна из 4 граней горизонтальна, или одна из 3 пар противоположных ребер горизонтальна. Какой случай имеет место для правильной треугольной пирамиды с ребром основания a и боковым ребром b ?

475. Определите полную поверхность призмы, описанной около шара, если площадь ее основания равна S .

476. Внутри шара отмечена точка. Через эту точку произвольным образом проводятся три взаимно перпендикулярные плоскости, которые пересекают шар по трем кругам. Докажите, что сумма площадей этих трех кругов для данной точки постоянна.

477*. а) Докажите, что для того чтобы существовал шар, касающийся всех ребер тетраэдра $ABCD$, необходимо и достаточно условие

$$AB + CD = AC + BD = BC + AD.$$

б) Чем заменятся это условие, когда шар касается трех ребер одной грани и продолжений трех других ребер?

в) Для каких тетраэдров существуют два шара типа б), соответствующие двум равным граням? Для каких тетраэдров существуют шар а) и один из шаров б)?

г) Докажите, что если существует шар а) и два шара б), то тетраэдр правильный и существуют все пять шаров: а) и четыре шара б).

478. Докажите, что любой выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

479*. Сколько может существовать сфер, касающихся всех плоскостей граней тетраэдра? Укажите все возможности.

480*. Несколько граней выпуклого белого многогранника покрашены в черный цвет так, что никакие две черные грани не имеют общего ребра. Докажите, что в многогранник нельзя вписать шар, если

а) сумма площадей черных граней больше суммы площадей белых граней;

б) черных граней больше, чем белых граней.

Глава 1. Алгебраические задачи

1. а) Если $N = a^2 + b^2$, то $2N = 2a^2 + 2b^2 = (a - b)^2 + (a + b)^2$, $N^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$.

б) Если $N_1 = a_1^2 + b_1^2$, $N_2 = a_2^2 + b_2^2$, то $N_1 N_2 = (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2)^2$.

2. Если $a \pm b = n$, то $2(a^3 \pm b^3) = (a \pm b)((a \mp b)^2 + a^2 + b^2)$.

3. а) $3a^4 + 1 = (a^2 - a)^2 + (a^2 + a)^2 + (a^2 - 1)^2$.

б) Бесконечно Это легко следует из пункта а): для любого t есть решение вида $x = t^2 - t$, $y = t^2 + t$, $z = t^2 - 1$.

4. Бесконечно. Уравнение переписывается так:

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 6,$$

откуда видно, что любая тройка вида $x = n$, $y = n - 1$, $z = n - 2$ ему удовлетворяет.

5. а), б) Можно. Поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$, сумму $1203^2 + 1604^2 = (3 \cdot 401)^2 + (4 \cdot 401)^2 = (5 \cdot 401)^2$ можно заменить на 2005^2 , а сумму $(3 \cdot 402)^2 + (4 \cdot 402)^2$ — на 2010^2 .

6. $\frac{1}{2}$. Если $a + b + c = 0$, то $a^2 + b^2 + c^2 = -2ab - 2ac - 2bc$ и $ab + ac + bc = -\frac{1}{2}$, а $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$, но $(ab + ac + bc)^2 = \frac{1}{4}$, и тогда $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c) = \frac{1}{4}$.

7. Пусть $\frac{x}{a} = p$, $\frac{y}{b} = q$, $\frac{z}{c} = r$. Тогда $p + q + r = 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$, т.е. $pq + pr + qr = 0$ и $(p + q + r)^2 = p^2 + q^2 + r^2$. Следовательно, $p^2 + q^2 + r^2 = 1$.

8. а), б) Докажите, что одна из сумм $a + b$, $a + c$, $b + c$ равна нулю.

9. Докажите, что либо $a = c$ и $b = d$, либо $a = d$, $b = c$.

$$\begin{aligned} 10. \quad & \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz} = \frac{1}{1+x+xy} + \\ & + \frac{x}{x+xy+1} + \frac{xy}{xy+1+x} = 1. \end{aligned}$$

11. -1 или 1 . Перемножив равенства $x - y = \frac{y-z}{yz}$, $y - z = \frac{z-x}{xz}$, $x - z = \frac{y-x}{xy}$, получим $(x-y)(y-z)(x-z) =$
 $= \frac{(y-z)(z-x)(y-x)}{x^2 y^2 z^2}$, откуда $x^2 y^2 z^2 = 1$.

$$\begin{aligned} 12. \quad & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z) = \\ & (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = \frac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2 + \\ & + (x-z)^2 + (y-z)^2). \end{aligned}$$

13. Если $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd = 1$, то
 $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 + 2ab + 2cd = 2ad - 2bc$,

$$\text{или } (a+b)^2 + (a-d)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 = 0,$$

откуда $a = -b$, $a = d$, $b = -c$, $c = -d$, что противоречит условию $ad - bc = 1$.

14. Разложите левую часть на множители.

15. а) $2003^2 + 2003 + 1$. Пусть $2003 = a$. Подкоренное выражение равно

$$a^2 + a^2(a+1)^2 + (a+1)^2 = (a^2 + a + 1)^2.$$

б) $1996^2 - 5$.

16. $\sqrt{3} - 1$.

17. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

18. Числа равны. Возведите данные числа в квадрат.

19. а) 2. Если $\alpha^3 - \alpha - 1 = 0$, то $\alpha = \alpha^3 - 1$,

$$3\alpha^2 - 4\alpha = 3\alpha^2 - 3\alpha - \alpha = 3\alpha^2 - 3\alpha - \alpha^3 + 1 = (1 - \alpha)^3,$$

$$3\alpha^2 + 4\alpha + 2 = 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 + \alpha + 1 = (1 + \alpha)^3.$$

б) 2. Заметим, что $\alpha^4 = \alpha^2 + \alpha$ и

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 + 3\alpha + 2 &= (\alpha + 1)^2 + \alpha^2 + \alpha + 1 = \\ &= (\alpha + 1)^2 + \alpha^3 + \alpha = (\alpha + 1)(\alpha + 1 + \alpha^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\alpha^4(\alpha+1)(\alpha^2+\alpha+1) &= (\alpha^2+\alpha)(\alpha+1)(\alpha^2+\alpha+1) = \\ &= (\alpha+1)^2(\alpha^3+\alpha^2+\alpha) = (\alpha+1)^2(\alpha^2+2\alpha+1) = (\alpha+1)^4.\end{aligned}$$

20. Числа равны. Если $\alpha = \sqrt[3]{2}$, то

$$\begin{aligned}12\sqrt[3]{2} - 15 &= 3(4\alpha - 5) = (\alpha^3 + 1)(4\alpha - 4 - 1) = \\ &= (\alpha^3 + 1)((\alpha^3 + 2)(\alpha - 1) - 1) = (\alpha^3 + 1)(\alpha^4 - \alpha^3 + 2\alpha - 3) = \\ &= (\alpha^3 + 1)(\alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha - 1) = (\alpha^3 + 1)(\alpha - 1)^3(\alpha + 1) = \\ &= (\alpha - 1)^3(\alpha + 1)^2(\alpha^2 - \alpha + 1) = (\alpha - 1)^2(\alpha^2 - \alpha + 1)^2\end{aligned}$$

(ибо $(\alpha + 1)^2(\alpha - 1) = \alpha^2 - \alpha + 1$).

Аналогично, $2\sqrt{3\sqrt[3]{4} - 3} = 2(\alpha^2 - \alpha + 1)$.

Окончательно,

$$\begin{aligned}\sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15} + 2\sqrt{3\sqrt[3]{4} - 3} &= (\alpha - 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) + 2(\alpha^2 - \alpha + 1) = \\ &= (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = \alpha^3 + 1 = 3.\end{aligned}$$

21. Числа равны. Пусть $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$. Тогда $x^3 = 4 - 3x$, т.е. $x^3 + 3x - 4 = 0$. Последнее уравнение имеет единственный корень, равный 1. Поэтому $x = 1$.

22. 0 при n нечетном и 9 при n четном. Если $(5 + \sqrt{26})^n = A_n + B_n\sqrt{26}$, где A_n и B_n — целые числа, то $(5 - \sqrt{26})^n = A_n - B_n\sqrt{26}$ и $(5 + \sqrt{26})^n + (5 - \sqrt{26})^n = 2A_n$. Так как

$$\left| (5 + \sqrt{26})^n \right| = \frac{1}{(5 - \sqrt{26})^n} < \frac{1}{10^n},$$

число $(5 + \sqrt{26})^n$ отличается от целого числа $2A_n$ меньше чем на $\frac{1}{10^n}$. При этом $2A_n$ больше, чем $(5 + \sqrt{26})^n$, при n четном и меньше при n нечетном.

23. Триста девяток. Пусть $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Поскольку $f(-1) < 0$, $f(0) < 0$, $f(1) < 0$, $f(2) < 0$, $f(3) > 0$, уравнение имеет 3 корня $\alpha > \beta > \gamma$, причем $2 < \alpha < 3$, $0 < \beta < 1$, $-1 < \gamma < 0$. Пусть $S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$. По теореме Виета $\alpha + \beta + \gamma = 3$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0$, поэтому

$$S_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 9.$$

Так как

$$\alpha^3 = 3\alpha^2 - 1, \quad \beta^3 = 3\beta^2 - 1, \quad \gamma^3 = 3\gamma^2 - 1, \quad (*)$$

получаем

$$S_3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 3 = 24.$$

Докажем, что S_n — целое число при любом $n \in \mathbf{N}$. Для этого, умножив равенства (*) на α^{n-3} , β^{n-3} , γ^{n-3} соответственно и сложив полученные равенства, приходим к соотношению $S_n = 3S_{n-1} - S_{n-3}$, из которого по индукции следует, что S_n — целое.

Так как $|\beta| < 1$, $|\gamma| < 1$, то при больших n число $\alpha^n = S_n - (\beta^n + \gamma^n)$ мало отличается от S_n . Оценим сумму $\beta^{2000} + \gamma^{2000}$.

Из неравенств $f\left(\frac{2}{3}\right) < 0$, $f\left(-\frac{3}{5}\right) < 0$ следует, что $0 < \beta < \frac{2}{3}$, $|\gamma| < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$, так что $\beta^{2000} + \gamma^{2000} < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{2000}$.

Далее, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} < \frac{1}{5}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^3 < \frac{1}{100}$ и, тем самым, $\left(\frac{2}{3}\right)^{12} < \frac{1}{10^2}$.

Но тогда $2\left(\frac{2}{3}\right)^{2000} < 2\left(\frac{1}{10^2}\right)^{\frac{500}{3}} < 2\left(\frac{1}{10^2}\right)^{163} < \frac{1}{10^{325}}$. Так что первые 300 знаков после запятой равны 9.

24. $\alpha > \sqrt[5]{13}$. Пусть $f(x) = x^3 - x - 3$. Легко доказать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень α , причем $1 < \alpha < 2$. Постараемся поточнее оценить число α . Так как

$f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{27} < 0$, то $\alpha > \frac{5}{3}$. Рассмотрим число α^5 . Поскольку

$\alpha^3 = \alpha + 3$ и $\alpha^5 = \alpha^3 + 3\alpha^2$, то $\alpha^5 = 3\alpha^2 + \alpha + 3$. Но

$3\alpha^2 + \alpha + 3 > 3\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{3}{5} + 3 = 13$. Итак, $\alpha > \sqrt[5]{13}$.

25. При $m = n = 0$. Если справедливо равенство из условия, то $(3 - 5\sqrt{2})^m = (5 - 3\sqrt{2})^n$. Однако $|3 - 5\sqrt{2}| > 1$, а $|5 - 3\sqrt{2}| < 1$.

26. Нет. Воспользуйтесь указанием к предыдущей задаче и тем, что $5 - 4\sqrt{2} < 0$.

27. Если $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1967} = a\sqrt{3} - b\sqrt{2}$, то $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1967} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$. Перемножив равенства, имеем $1 = 3a^2 - 2b^2$.

28. Если $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$, то $(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n \sqrt{2}$ и $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$. Но тогда $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{2b_n^2 + 1} - \sqrt{2b_n^2}$ при четном n и $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{2b_n^2} - \sqrt{2b_n^2 + 1}$ при нечетном n .

29. Пусть a – корень данного уравнения, т.е. $a^3 - 3a + 1 = 0$. Докажем, что $x = a^2 - 2$ – тоже его корень. Для этого вычислим

$$x^3 - 3x + 1 = (a^2 - 2)^3 - 3(a^2 - 2) + 1 = a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 1. (*)$$

Поскольку $a^3 = 3a - 1$, то $a^6 = 9a^2 - 6a + 1$, $a^4 = 3a^2 - a$. Подставляя последние два выражения в $(*)$, получаем, что $x^3 - 3x + 1 = 0$. Утверждение доказано.

Равенство $a^2 - 2 = a$ невозможно. Поэтому либо $a^2 - 2 = b$, либо $a^2 - 2 = c$. Для завершения решения убедитесь, что равенство $a^2 - 2 = c$ невозможно. Поэтому $a^2 - 2 = b$, $b^2 - 2 = c$, $c^2 - 2 = a$.

30. а), б) $\frac{9091}{9991}$. б) Преобразуем числитель:

$$\begin{aligned} 1010 \underbrace{11 \dots 1}_{2k+1} 0101 &= 10^{2k+8} + 10^{2k+6} + \frac{10^{2k+1} - 1}{9} 10^4 + 100 + 1 = \\ &= \frac{9 \cdot 10^{2k+8} + 9 \cdot 10^{2k+6} + 10^{2k+5} - 10^4 + 900 + 9}{9} = \\ &= \frac{10^{2k+5} \cdot 9091 - 9091}{9} = 9091 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{2k+5}. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуется знаменатель.

$$\begin{aligned} \textbf{31. } 18n. (10^n - 1)^3 &= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1 = \\ &= \underbrace{99 \dots 9}_{n-1} \underbrace{700 \dots 0}_{n-1} \underbrace{299 \dots 9}_n. \end{aligned}$$

32. а) 2802; б) $45n \cdot 10^{n-1} + 1$. Подсчитаем сумму цифр множества всех целых чисел от 0 до $\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ цифр}}$. Для этого выпишем

их все подряд по порядку и рассмотрим пары чисел, равноотстоящих от начала и конца записи: $(0; \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ цифр}})$ – первая пара, $(1; \underbrace{99 \dots 98}_{n \text{ цифр}})$ – вторая, ..., $(4 \underbrace{99 \dots 9}_{n-1 \text{ цифр}}; 5 \underbrace{00 \dots 0}_{n-1 \text{ цифр}})$ – последняя пара.

Сумма цифр чисел каждой пары в любом разряде одна и та же – она равна 9, разрядов всего n , так что сумма цифр чисел одной пары равна $9n$, а количество пар равно половине количества рассматриваемых чисел, т.е. $5 \cdot 10^{n-1}$.

Таким образом, сумма цифр всех целых чисел от 0 до $\underbrace{99\dots9}_{n \text{ цифр}}$ равна $45n \cdot 10^{n-1}$. Теперь легко решить обе части задачи.

33. а) $2^{2003} - 1$ цифра; б) $9 \cdot 2^{2002}$. Умножим число $A = \overline{a_1 \dots a_k}$, где $a_1, \dots, a_k \neq 0$ – цифры, на $\underbrace{99\dots9}_{n \text{ цифр}}$, $n \geq k$. Имеем

$$B = A(10^n - 1) = A \cdot 10^n - A = \overline{a_1 \dots a_k \underbrace{00\dots0}_n} - \overline{a_1 \dots a_k}.$$

Выполняя вычитание «столбиком», получим

$$B = A(10^n - 1) = \overline{a_1 \dots (a_k - 1) \underbrace{99\dots9}_{n-k} (9 - a_1) (9 - a_2) \dots (10 - a_k)}.$$

Это число $(n+k)$ -значно, а сумма цифр его равна $9n$. Поэтому количество цифр в десятичной записи произведения равно

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2002} = 2^{2003} - 1,$$

а сумма цифр равна $9 \cdot 2^{2002}$.

34. а) Не существует, так как число 1994 при делении на 9 дает остаток 5.

б) Существует. Для числа вида $n = 9k + 4$ сумма цифр числа $(10^k - 3)^2$ в точности равна n .

Выбор такого числа обусловлен сравнительной простотой вычисления суммы цифр:

$$(10^k - 3)^2 = 10^{2k} - 6 \cdot 10^k + 9 = \underbrace{99\dots9}_{k-1} 4 \underbrace{00\dots0}_{k-1} 9.$$

Ясно, что сумма цифр равна $9k + 4$. Для $n = 1993$ число $k = 221$.

35. 27. Пусть рассыпанное число равно a^6 . Поскольку сумма цифр числа a^6 , равная 45, делится на 9, то и само число a^6 делится на 9. Значит, число a делится на 3.

Так как a^6 – девятизначное число, а $2^6 = 64$, получаем: $20^6 = 64000000 < a^6$. С другой стороны, $32^6 = 2^{30} = (2^{10})^3 = 1024^3 > 1000^3 = 10^9 > a^6$. Итак, $20^6 < a^6 < 32^6$, но $a^6 \neq 30^6$, так как в числе 30^6 шесть нулей, а у нас всего один нуль. Остались три кандидата: $a = 21$; $a = 24$; $a = 27$.

Но число 21^7 оканчивается на 1, а такой цифры у нас нет.

Число 24^6 , как легко понять, возводя последовательно число 4 в натуральную степень, оканчивается на 6, что в нашем случае невозможно. Остается лишь число 27.

Замечание. Поскольку в условии сказано, что рассыпана шестая степень числа, нет необходимости проверить цифровой состав числа 27^6 .

36. а) Поскольку $53 + 96 = 83 + 66 = 109 + 40 = 149$, данное число делится на 149.

б) $16016003 + 1 = 4002^2$.

в) Пусть $a = 20$. Данное число равно

$$a^7 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)((a^3 + 1)(a^2 - a) + 1).$$

$$\begin{aligned} \text{г) } 2^{10} + 5^{12} &= (2^5)^2 + 2 \cdot 2^5 \cdot 5^6 + (5^6)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 5^6 = \\ &= (2^5 + 5^6)^2 - (2^3 \cdot 5^3)^2. \end{aligned}$$

д) Если $x = 5^{25}$, то $\frac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2 - 5x(x + 1)^2$. При $x = 5^{25}$ последнее выражение является разностью двух квадратов натуральных чисел.

37. Делится. Если $x = 2^{50}$, то

$$\begin{aligned} 2^{202} + 1 &= 4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 = \\ &= (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1), \end{aligned}$$

но $2x^2 + 2x + 1 = 2^{101} + 2^{51} + 1$.

38. а) Нельзя. В сумму будет входить число $\pm \frac{1}{8}$. Если сумма всех остальных чисел $\frac{p}{q}$, то $\frac{p}{q} \pm \frac{1}{8} = \frac{r}{s}$, где S делится на 8, r — нечетно (число q содержит двойку не более чем во второй степени).

б) Следует выкинуть все дроби, знаменатели которых делятся на 5, 7, 8, 9, 11, т.е. 6 чисел. Для оставшихся чисел требуемая расстановка знаков возможна: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = 0$.

39. а) 0; б) $-p - q$; в) 0.

40. а) Можно. Например, последовательность $\{a_k\}$, где $a_k = \frac{k}{2000!}$, а $k = 1, 2, \dots, 2000$, — арифметическая прогрессия. Действительно,

$$d = a_{k+1} - a_k = \frac{k+1}{2000!} - \frac{k}{2000!} = \frac{1}{2000!} = \text{const}.$$

б) Нет.

В арифметической прогрессии $a_{n+1} - a_n = d$ — постоянная величина. Но в бесконечной последовательности вида $\frac{1}{n_k}$ разность соседних членов $\frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_{k+1}}$ стремится к нулю.

41. $\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{n}{2}}.$

42. а) $\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}.$

$$1 + 11 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_n = \frac{1}{9}(10 - 1 + 10^2 - 1 + \dots + 10^n - 1).$$

б) $\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$ Пусть $S_n(x)$ — искомая сумма.

Вычислите разность $xS_n(x) - S_n(x).$

43. $1 - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) =$
 $= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$

44. $\frac{2n+2}{n+2}.$ Воспользуйтесь тем, что $1 + \frac{1}{k(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$

45. $\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{2^{101}}} \cdot \frac{(2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1)\dots(2^{2^k} + 1)}{2^{2^{k+2}}} =$

$$= \frac{(2^{2^0} - 1)(2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1)\dots(2^{2^k} + 1)}{2^{2^{k+2}}} = \frac{2^{2^{k+1}} - 1}{2^{2^{k+2}}} = \frac{1}{2^{2^{k+1}}} - \frac{1}{2^{2^{k+2}}}.$$

46. 1. Исходное выражение равно

$$\frac{1}{1 + 1/(1+x)} + \frac{1}{2+x} = \frac{1+x}{2+x} + \frac{1}{2+x} = 1,$$

где x — дробь в знаменателе второго слагаемого.

47. а) $\frac{\sin nx \sin(n+1)x}{\sin \frac{x}{2}}.$ Пусть

$$S_n(x) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

Тогда

$$\sin \frac{x}{2} S_n(x) = \sin \frac{x}{2} \sin x + \sin \frac{x}{2} \sin 2x + \dots + \sin \frac{x}{2} \sin nx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \dots + \cos \left(nx - \frac{x}{2} \right) - \right. \\ \left. - \cos \left(nx + \frac{x}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2} \right) = \sin nx \cdot \sin(n+1)x.$$

б) $\frac{\sin(n+1)x \cos nx}{\sin \frac{x}{2}}$. Пусть $C_n(x)$ – искомая сумма. Преоб-

разуйте $\sin \frac{x}{2} C_n(x)$, как в пункте а).

в) $\frac{\sin nx}{\sin x \cos x \cos(n+1)x}.$

$$\frac{1}{\cos kx \cos(k+1)x} = \frac{1}{\sin x} (\operatorname{tg}(k+1)x - \operatorname{tg} kx).$$

48. Если $a = 2^n$ и $\frac{2^n - 2}{n} = m$, то

$$\frac{2^{2^n-1} - 2}{2^n - 1} = \frac{2(a^m - 1)}{a - 1} = 2(a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + 1).$$

49. а) Это прогрессия 1, 25, 49. б) Возьмем прогрессию 1, 25, 49, 73 и умножим все ее члены на 73^2 . Получается прогрессия $73^2, (5 \cdot 73)^2, (7 \cdot 73)^2, (73)^3$, удовлетворяющая условию.

в) Если уже построена n -членная прогрессия, состоящая из степеней натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n , возьмем следующий член этой прогрессии a_{n+1} и умножим все члены этой $(n+1)$ -членной прогрессии на a_{n+1}^k , где k – наименьшее общее кратное всех степеней, встречающихся в числах a_1, a_2, \dots, a_n . Получается $(n+1)$ -членная прогрессия, состоящая из степеней натуральных чисел.

г) Предположим, что существует бесконечная прогрессия, состоящая из степеней натуральных чисел: $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$. Легко видеть, что $a_n \geq n^2$. Рассмотрим сумму обратных величин член-

нов этой прогрессии $S_n = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}$. Ясно, что

$$S_n \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Итак, сумма S_n ограничена. Однако для любой прогрессии $a_n = a + dn$ ($a > 0, d > 0$). Сумма $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ становится сколь угодно большой при достаточно больших n . В самом деле, $a_n \leq (a + d)n$, т.е. $\frac{1}{a_n} \geq \frac{c}{n}$, где $c = \frac{1}{a + d} > 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq c \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Из задачи 71, в) следует, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} > \frac{k}{2}$, т.е. при достаточно большом k она больше любого наперед заданного числа.

50. Может. Если $S_{m,n}$ – сумма нечетных чисел от m до n , то $S_{m,n} = \frac{(n - m + 2)(m + n)}{4}$. Можно подобрать m и n так, чтобы выполнялись равенства $n - m + 2 = 2 \cdot 1993$, $m + n = 2 \cdot 1993^{1992}$.

51. а) Можно; б) можно; в) нельзя.

Заметим, что $a^2 - (a + 1)^2 - (a + 2)^2 + (a + 3)^2 = 4$ при любом a . Поэтому сумма $a^2 - (a + 1)^2 - (a + 2)^2 + (a + 3)^2 - (a + 4)^2 + (a + 5)^2 + (a + 6)^2 - (a + 7)^2 = 0$. Итак, расставляя знаки между любыми восемью последовательными квадратами таким образом: $+ - - + - + + -$, мы получим нулевую сумму. Осталось разбить на восьмерки числа от 0 до 1999^2 для пункта а) и числа $1^2, 2^2, \dots, 2000^2$ для пункта б).

в) Так как сумма $1^2 + 2^2 + \dots + 2000^2$ нечетна, то при любой расстановке знаков сумма $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm 2001^2$ будет нечетной.

52. а) Можно; б) можно; в) нельзя. а), б) Убедитесь в том, что расстановка знаков $+ - - + - + + - - + + - - +$ перед кубами любых 16 последовательных целых чисел дает нулевую сумму. В случае а) разбиваем числа $0^3, 1^3, 2^3, \dots, 1999^3$ на группы по 16 последовательных кубов, в случае б) – начиная с 1. в) Сумма кубов $1^3 + 2^3 + \dots + 2001^3$ нечетна. Поэтому нечетна и любая сумма вида $\pm 1^3 \pm 2^3 \pm \dots \pm 2001^3$.

53. 3994. После замены $t = x^2 + 2x$ получаем уравнение $t^2 - 1993t + 1995 = 0$. Пусть t_1 и t_2 – корни этого уравнения. Пользуясь теоремой Виета, подсчитайте суммы квадратов корней уравнений $x^2 + 2x = t_1$ и $x^2 + 2x = t_2$.

$$54. \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right].$$

55. Если уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет не целый корень α , то α – иррациональное число. Общий же корень уравнений из условия задачи при $p_1 \neq p_2$ и $q_1 \neq q_2$ равен $\alpha = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$, т.е. является рациональным числом.

56. Пусть α – корень уравнения $f(x) = x^2 + px + q = 0$, а β – корень уравнения $g(x) = x^2 - px - q = 0$, тогда

$$\alpha^2 - 2p\alpha - 2q = 3\alpha^2 - (2\alpha^2 + 2p\alpha + 2q) = 3\alpha^2,$$

а

$$\beta^2 - 2p\beta - 2q = -\beta^2 + (2\beta^2 - 2p\beta - 2q) = -\beta^2.$$

Это значит, что квадратный трехчлен $x^2 - 2px - 2q$ принимает на концах отрезка $[\alpha; \beta]$ значения разных знаков, т.е. имеет корень на интервале $(\alpha; \beta)$.

57. Если $a \neq b$, то общий корень данных уравнений равен c .

58. Условие, что корни трехчленов $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$ и $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$ вещественны и перемежаются, эквивалентно тому, что графики $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ пересекаются в точке (x_0, y_0) , лежащей ниже оси абсцисс: $y_0 < 0$. Решая уравнение $f_1(x) = f_2(x)$, находим $x_0 = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}$ и $y_0 = R(p_1 - p_2)^2$, где $R = (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1)$.

Замечание. Число R называется результатом многочленов f_1 и f_2 . Равенство $R = 0$ равносильно тому, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют общий корень.

59. Если уравнение $f(x) = x$ не имеет корней, то либо $f(x) > x$ при всех x , либо $f(x) < x$ при всех x . Но тогда либо $f(f(x)) > f(x) > x$, либо $f(f(x)) < f(x) < x$ при всех x .

Замечание. Утверждение задачи верно не только для квадратного трехчлена $y = f(x)$, но и для любой непрерывной функции.

60. Если существует x , при котором $f(x) \leq 0$, то корни x_1 и x_2 уравнения $f(x) = 0$ существуют и расположены на некотором интервале $(m, m+1)$, где m – целое число, так что $|x_1 - x_2| < 1$, и $m < -\frac{p}{2} < m+1$. Поэтому p нечетно и $D > 0$. Но по теореме Виета $D = p^2 - 4q = (x_1 - x_2)^2 < 1$, что невозможно.

61. $a = 5$. Пусть $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$ – корни многочлена $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ и $1 \leq f(0)f(1) = a^2 x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) < \frac{1}{16}$. Но тогда $a^2 > 16$, т.е. $a \geq 5$. При $a = 5$ трехчлен $5x^2 - 5x + 1$ имеет 2 корня на интервале $(0; 1)$.

62. Пусть несократимые дроби $-\frac{p}{q}$ и $-\frac{r}{s}$ (p, q, r, s – натуральные) – корни трехчлена $ax^2 + bx + c$. Тогда $ax^2 + bx + c = (qx + p)(sx + r)$ (докажите!) и $\overline{abc} = (10q + p)(10s + r)$, что противоречит простоте числа \overline{abc} .

63. Нет, так как $D = b^2 - 4ac$ при нечетных a, b и c не является квадратом целого числа (D при делении на 8 дает в остатке 5).

64. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$. Так как $f(1) = g(1)$ и $f(-1) = g(-1)$, то $|g(1)| \leq 1$, $|g(-1)| \leq 1$ и, кроме того, $|c| = |f(0)| \leq 1$. Предположим, что существует точка $x \in [-1; 1]$, для которой $|g(x)| > 2$. Тогда вершина параболы $y = g(x)$ – точка с координатами $(x_0; g(x_0))$, причем $|x_0| \leq 1$ и $|g(x_0)| > 2$. Выделяя полный квадрат, получим $g(x) = c(x - x_0)^2 + g(x_0)$. Подставим в это равенство ближайшее к x_0 из чисел 1 и -1 (можно считать для определенности, что это 1). Тогда $|1 - x_0| \leq 1$ и поэтому $|g(x_0)| = |g(1) - c(1 - x_0)^2| \leq |g(1)| + |c| \leq 2$, что противоречит неравенству $|g(x_0)| > 2$. Пример трехчлена $f(x) = 2x^2 - 1$ показывает, что оценку $|g(x)| \leq 2$ улучшить нельзя (в этом случае $g(x) = -x^2 + 2$).

65. Все такие окружности проходят через точку $(0; 1)$. Возможны 3 случая расположения параболы (рис.34). Во всех

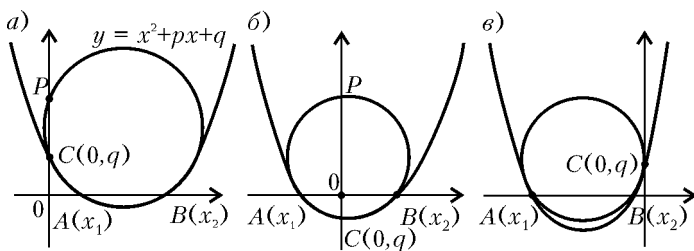


Рис. 34

случаях $OA \cdot OB = OC \cdot OP$, откуда $|x_1 x_2| = |q| \cdot OP$, а так как по теореме Виета $x_1 x_2 = q$, получаем $p = 1$.

66. а) Второе число. Обозначим первое число через A , а второе через B . Пусть $a = 1998$. Тогда

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2 - a}{a^2 + 2a + 1} < 1.$$

б) Второе число. Если $a = 1992$, то $(a+1)^{a-1} \cdot (a-1)^{a+1} =$
 $= \frac{a-1}{a+1} (a^2 - 1)^a < a^{2a}.$

67. Второе. Пусть $x = \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{1995}}}}, y = \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{1995}}}.$

Ясно, что $y > x$. Но тогда

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3+x}} < \frac{1}{2 + \frac{1}{3+y}}.$$

68. а) Второе, ибо $\left(\frac{3}{5}\right)^{100} + \left(\frac{4}{5}\right)^{100} < \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{91}{125} < 1.$

б) Второе, так как $\frac{\left((29 \cdot 2)^2\right)^{100}}{\left((5 \cdot 3)^3\right)^{100}} \cdot \frac{5^{21}}{2^{49}} = \left(\frac{3364}{3375}\right)^{100} \cdot \left(\frac{125}{128}\right)^7 < 1.$

69. Первое. Пусть $a = 1991$. Тогда $(\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1})^2 = 2a +$
 $+ 2\sqrt{a^2 - 1} > 4a.$

70. Второе число больше. Сначала докажете, а затем воспользуйтесь неравенством $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} < \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}$ при $a > 0, b > 0, a \neq b.$

71. а) Пусть $n = 1992$. Разобьем данную сумму на 3 группы по n слагаемых:

$$S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} + \dots + \frac{1}{3n}} + \underbrace{\frac{1}{3n+1} + \dots + \frac{1}{4n}}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{n}{n+1},$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2n+1} + \dots + \frac{1}{3n} < \frac{n}{2n+1},$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3n+1} + \dots + \frac{1}{4n} < \frac{n}{3n+1},$$

получаем

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < S_n < \frac{n}{n+1} + \frac{n}{2n+1} + \frac{n}{3n+1} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

т.е. $\frac{13}{12} < S_n < \frac{11}{6}.$

б) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{2},$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1}}_{n \text{ раз}} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

в) Разбейте сумму на группы вида $\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}$ по 2^k слагаемых и воспользуйтесь пунктом б).

72. Первое число. Рассмотрите разность данных чисел.

73. а) Пусть $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}.$ Тогда

$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{99^2-1}{100^2} < x^2 < \frac{1^2}{2^2-1} \cdot \dots \cdot \frac{99^2}{100^2-1}.$$

После упрощений получаем

$$\frac{1}{200} < x^2 < \frac{1}{101}.$$

б) Воспользуйтесь индукцией. При переходе от n к $n+1$ нужно доказать неравенство

$$\frac{2n+1}{2n+2} < \sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}},$$

становящееся очевидным после возведения в квадрат и несложных преобразований.

74. Меньше. Пусть $\alpha = \frac{1}{10^5}.$ Данное число равно

$$(1-\alpha)^{1+\alpha} \cdot (1+\alpha)^{1-\alpha} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \cdot (1-\alpha^2) < 1.$$

75. Если $\sqrt{2} > \frac{m}{n}$, то $\frac{n\sqrt{2}-m}{n} = \frac{2n^2-m^2}{n(n\sqrt{2}+m)} > \frac{2n^2-m^2}{2\sqrt{2}n^2} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}n^2}$.

76. а) Замените $\sqrt{3}$ на 6. б) $a^2 + |a| < (|a| + 1)^2$.

в) Обозначим $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1} = a \quad (a < 2)$. Имеем

$$\frac{2 - \sqrt{2+a}}{2-a} = \frac{1}{2 + \sqrt{2+a}} > \frac{1}{4}.$$

77. Сумма четвертых степеней не меньше суммы кубов. Пусть $x > 0$. Сравним разность $x^4 - x^3$ с разностью $x^2 - x$:

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 - (x^2 - x) &= x^2(x^2 - x) - (x^2 - x) = (x^2 - x)(x^2 - 1) = \\ &= x(x+1)(x-1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Осталось записать неравенства $x_i^2 - x_i^3 \geq x_i^2 - x_i$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ и почленно сложить их.

78. Пусть $a < b < c$. Тогда при достаточно больших k

$$\left(\frac{a}{c}\right)^k + \left(\frac{b}{c}\right)^k < 1$$

и треугольника со сторонами a^k, b^k, c^k нет.

79. Ясно, что $q_k \geq k^2$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Поэтому

$$\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_n}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2} > \frac{1}{2} \quad (\text{см. задачу 44}).$$

80. $a > b$, так как $\frac{1}{2} < \sqrt{a(1-b)} < \frac{a+1-b}{2}$.

81. Сложите неравенства $a > k + nb/a$ и $b > n + ka/b$ и воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

82. $(3 - 2\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2})$. Если $b \geq a$, то $m(a-1) \geq a^2 + a$, т.е. $a^2 - (m-1)a + m \leq 0$, откуда $m^2 - 6m + 1 \geq 0$.

83. $a + c > b$. Рассмотрите треугольник со сторонами a и b и углом $\arccos 1/4$ между ними.

84. $\sqrt{10}$ при $x = y = z = \frac{1}{3}$. Данная сумма — это длина ломаной линии, помещенной на рис.35 ($AB = 1, BC = 3$).

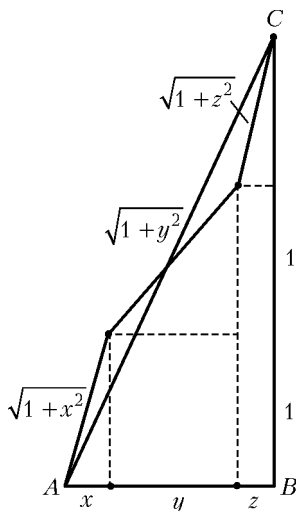


Рис. 35

Минимум суммы достигается, когда $x = y = z$, а ломаная при этом совпадает с отрезком AC.

85. 9 и 1. Точка $(a; b)$ лежит на окружности $x^2 + y^2 = 1$, а точка $(u; v)$ — на окружности $x^2 + y^2 = 4$.

86. $\sqrt{41}$. Данная функция равна сумме расстояний от точки $M(x; 0)$ до точек $A(3; 2)$ и $B(7; 3)$ соответственно. Наименьшее значение равно расстоянию от точки $A'(3; -2)$ до точки B .

87. Одно. Пусть, для определенности, $x < y < z$. Введем обозначения $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$, $\sigma_3 = xyz$. Числа x , y и z — корни многочлена

$$P(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3.$$

По условию $\sigma_3 > 1$, поэтому $z > 1$ и $\sigma_1 > 1$. Многочлен $P(t)$ принимает положительные значения при $x < t < y$ и $t < z$. При этом если $P(1) < 0$, то $y < 1$, если же $P(1) > 0$, то $x < 1 < y$. Далее,

$$P(1) = 1 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 > 1 - \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_3 = (1 - \sigma_1)(1 - \sigma_3) > 0.$$

Поэтому $0 < x < 1$, $1 < y < z$.

$$\mathbf{88.} \quad \sqrt{2} \quad \text{при} \quad x = \sqrt{2}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

89. Наименьшее значение s равно $1 - 2^{-\frac{1}{n}}$ и достигается при $x_k = 2^{\frac{k}{n}} \left(1 - 2^{-\frac{1}{n}}\right)$. Пусть $y_0 = 1$, $y_k = 1 + x_1 + \dots + x_k$ ($1 \leq k \leq n$).

Тогда $y_n = 2$, $x_k = y_k - y_{k-1}$ и если все данные числа не превосходят s , т.е. $\frac{x_k}{y_k} = 1 - \frac{y_{k-1}}{y_k} \leq s$, то $1 - s \leq \frac{y_{k-1}}{y_k}$. Перемножив эти

неравенства ($k = 1, 2, \dots, n$), получим $(1 - s)^n \leq \frac{y_0}{y_n} = \frac{1}{2}$. Поэтому $s \geq 1 - 2^{-\frac{1}{n}}$. Это значение достигается, когда $1 - s = 2^{-\frac{1}{n}} = \frac{y_{k-1}}{y_k}$ для всех k , т.е. при $y_1 = 2^{\frac{1}{n}}$, $y_2 = 2^{\frac{2}{n}}$, ..., $y_n = 2$.

90. а) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$. Выполните замену $x = t - \frac{1}{t}$, где $t > 0$. (Функция $y = f(t)$ возрастает при $t > 0$ и принимает все действительные значения.)

б) $\frac{1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$. $x^4 - 4x - 1 = (x^2 + 1)^2 - 2(x+1)^2$.

в) $\frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$. $x^4 + 8x - 7 = (x^2 + 1)^2 - 2(x-2)^2$.

г) $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$. Перепишите уравнение так: $(x+1)^3 = -2x^3$.

д) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. Обозначив $y = 2x^3 + x - 3$, получаем систему

$$\begin{cases} x = 2y^3 + y - 3, \\ y = 2x^3 + x - 3. \end{cases}$$

е) 1. Убедитесь в том, что $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = (x-1)^2 \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен с положительными коэффициентами.

ж) 1. Ясно, что $x > 0$. Заметим, что $x^{2k} + 1 \geq 2x^k$, а в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим $1 + x^2 + \dots + x^{2k-2} \geq kx^{k-1}$. Перемножив полученные неравенства, видим, что левая часть уравнения не меньше правой. Учитывая условия равенства в выписанных неравенствах, получаем, что $x = 1$.

91. а) При $a < -3$ решений нет, -1 при $a = -3$, $-1 \pm \sqrt{a+3}$ при $-3 < a < -1$; 1 , $-1 \pm \sqrt{2}$ при $a = -1$; $-1 \pm \sqrt{a+3}$, $1 \pm \sqrt{a+1}$ при $a > -1$. Рассмотрите уравнение как квадратное относительно a , выразите a через x , а затем решите полученные уравнения.

б) $1 - a$, $\frac{-a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a - 3}}{2}$ при $a < -3$ и $a > 1$; -1 , 0 при $a = 1$, 4 ; 1 при $a = -3$; $1 - a$ при $-3 < a < 1$.

92. Может при $a = -2c$, $b = c^2$, $c > 0$.

93. а) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{8}$. Пусть $t = \sqrt{1+x}$. Тогда $2x^3 = 3x^2t - t^3$ или $(t \neq 0) \ 2z^3 - 3z^2 + 1 = 0$, где $z = \frac{x}{t}$. Отсюда либо $z = 1$, либо $z = -\frac{1}{2}$.

6) $\frac{\sqrt{13}-1}{4}; \frac{-1-\sqrt{61}}{30}$. Замена $t = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

94. $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Приведите уравнение к виду $2(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 1)^2 = 0$.

95. а) $(1; 0; \sqrt{2})$. К каждому из слагаемых в левой части уравнения примените неравенство $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, справедливое при любых a и b . Далее воспользуйтесь условием равенства в этом неравенстве.

б) $(2; 2)$.

в) $x_k = 2k^2$ при $k = 1, 2, \dots, n$.

96. При $0 < a \leq 2$ уравнение имеет корни $x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a^3 - 2}{3a}\right)^2}$.

Возводя левую и правую части уравнения в куб, получаем равносильное уравнение $2 + 3\sqrt[3]{1 - x^2}(\sqrt[3]{1 + x} + \sqrt[3]{1 - x}) = a^3$.

После замены суммы кубических радикалов на a приходим к следствию:

$$3a\sqrt[3]{1 - x^2} = a^3 - 2.$$

Последнее уравнение имеет корни при $a = -1$ и $0 < a \leq 2$. Однако при $a = -1$ исходное уравнение корней не имеет. При остальных

значениях a числа $\pm \sqrt{1 - \left(\frac{a^3 - 2}{3a}\right)^2}$ удовлетворяют исходному уравнению. Убедитесь в этом!

97. $p = 0$, $p = \pm \sqrt{\frac{26}{27}}$.

98. $x_1 = 1$, $\alpha_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Уравнение приводится к виду $x = f(f(x))$, где $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$. Поскольку эта функция является возрастающей, исходное уравнение равносильно уравнению $x = f(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$, которое легко решается.

99. $(0; 0; 0)$, $x = y = z = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Докажите, что $x = y = z$.

б) $(0; 0; 0)$, $x = y = z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

в) $(0; 0; 0)$; $(0; 1; 1)$; $(1; 0; 1)$; $(-1; 0; -1)$; $(-1; -1; 0)$; $\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$. Перемножим первое и третье уравнения и возведем в квадрат второе. После приравнивания левых частей полученных уравнений и упрощений приходим к соотношению $xy^2(x-y)^2 = 0$.

г) $(2; 1)$, $(1; -1)$. Умножьте первое уравнение на y , второе на x и сложите полученные уравнения.

д) $(0; 0)$; $(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2})$. Решение $(0; 0)$ очевидно. Пусть теперь $y \neq 0$. Разделив обе части первого уравнения на y^5 , получим систему, равносильную данной при $y \neq 0$:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y, \\ (x^2)^3 + x^2 = (2y)^3 + 2y. \end{cases}$$

Пусть $f(t) = t^5 + t$; $g(t) = t^3 + t$. Обе функции – возрастающие, поэтому последняя система равносильна такой:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = y, \\ x^2 = 2y. \end{cases}$$

100. 2 решения. Очевидно решение $x = y = z$. Пусть x, y, z – ненулевое решение системы, тогда обязательно $x < 0, y < 0, z < 0$. Пусть (для определенности) $x \leq y \leq z < 0$. Тогда

$$x^2 \geq y^2 \geq z^2 \text{ и } x^4 \geq y^4 \geq z^4.$$

При этом

$$x + y^2 + z^4 \leq z + x^2 + y^4 = 0.$$

Поэтому если не все числа x, y, z равны между собой, то

$$x + y^2 + z^4 < 0.$$

Отсюда следует, что

$$x = y = z < 0.$$

Уравнение же

$$x^4 + x^2 + x = 0, \text{ т.е. (при } x \neq 0) \ x^3 + x + 1 = 0,$$

имеет единственный отрицательный корень.

101. $(0; 0; 0); (1; 1; 1)$. Очевидно, что $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Так как $\frac{2t}{1+t^2} \leq 1$ при $t \geq 0$, то $x \leq y \leq z \leq x$, так что $x = y = z$.

102. $x_1 = x_2 = \dots = x_{25} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Очевидно, что $0 \leq x_i \leq 1$ при $i = 1, 2, \dots, 25$. Для доказательства равенства чисел x_1, \dots, x_{25} убедитесь в том, что числа x_2, x_4, \dots, x_{24} , а также числа x_1, x_3, \dots, x_{25} образуют строго монотонные последовательности, если $0 < x_1 < 1$. Поэтому все числа x_1, x_2, \dots, x_{25} равны.

103. Если n нечетно, то $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$. При четном n система имеет бесконечно много решений:
 $x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1} = a, x_2 = x_4 = \dots = x_n = \frac{a+2}{3a-1}$, где $a \neq \frac{1}{3}$ — любое число.

Вычитая из первого уравнения второе, получим $3x_2(x_1 - x_3) = x_1 - x_3$, откуда либо $x_2 = \frac{1}{3}$, что невозможно, либо $x_1 = x_3$. Аналогично $x_3 = x_5 = x_7 = \dots, x_2 = x_4 = \dots$ и $x_1 = x_{n-1}$. При нечетном n это означает, что $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, а при четном — что $x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1}$ и $x_2 = x_4 = \dots = x_n$.

104. Помножив первое уравнение на x и вычитая из него второе уравнение, получим $a(x^4 - 1) = 0$, т.е. $x = \pm 1$. Тогда либо $a + b + c + d = 0$, либо $-a + b - c + d = 0$.

105. Числа x, y, z — корни уравнения $t^3 - 3t = a$ при некотором a . По теореме Виета $x + y + z = 0, xy + xz + yz = -3$. Следовательно,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 6.$$

106. Если степень многочлена $P(x)$ больше 1, то при достаточно больших натуральных n разность $P(n+1) - P(n)$ сколь угодно велика по модулю. Поэтому между числами $P(n)$ и $P(n+1)$ найдется целое число. Это число будет значением многочлена $P(x)$ при некотором $x \in (n; n+1)$. Итак, $P(x) = ax + b$. Докажите теперь, что либо $|a| = 1$, либо $a = 0$.

107. Если $p(7) = 11$, а $p(11) = 13$, то $p(11) - p(7) = 2$. Но левая часть этого равенства делится на 4, а правая — нет.

108. Докажите, что значения такого многочлена нечетны при всех целых x .

109. Нет. Предположим, что существует такой многочлен с целыми коэффициентами: $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Очевидно, что $a_n \neq 0$. Если $|a_n| > 1$, то при всех достаточно больших

целых k , делящихся на $|a_n|$, число $p(k)$ будет составным. Если $|a_n| = 1$ и $p(1)$ – простое число, то рассмотрим многочлен $p(k+1) = kq(k) + p(1)$. При достаточно больших k , делящихся на $p(1)$, $p(k+1)$ делится на $p(1)$ и не является простым числом.

110. а) 1; б) 1. Для любого многочлена $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ имеем $p(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, $p(-1) = (-1)^n a_0 + (-1)^{n-1} a_1 + \dots + a_n$, так что сумма коэффициентов при четных степенях равна $\frac{p(1) + p(-1)}{2}$ а при нечетных $\frac{p(1) - p(-1)}{2}$.

111. $x + 1$.

112. Пусть $h(x) = x^2 + x + 1$. Тогда $x + 1 = h(x) - x^2$ и $(h(x) - x^2)^{2n+1} + x^{n+2} = p(x)h(x) - x^{n+2}(x^{3n} - 1)$, но $x^{3n} - 1$ делится на $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

113. а) Нет, так как $f(2) = g(2) = 6$, а 2 не делится на 6.

б) Нет, так как $f(1/2) = g(1/2) = 1$.

в) Да. $x = (f - g)^2 + 2g - 3f$.

114. Может. Если первый игрок поставит своим первым ходом -1 перед x , а при втором своем ходе поставит на оставшееся место число, противоположное поставленному вторым, получится многочлен $x^3 - ax^2 - x + a = (x^2 - 1)(x - a)$, все корни которого целые.

115. Пусть $p(x) = b_0x^n + \dots + b_{n-1}x + b_n$, $b_n \neq 0$.

а) Если числа b_0, b_1, \dots, b_n неотрицательны, то сумма цифр числа $p(10^l)$ при $10^l > \max_{0 \leq i \leq n} b_i$ будет в точности равна сумме всех цифр чисел b_0, b_1, \dots, b_n .

б) Можно считать, что $b_0 > 0$ (иначе будем рассматривать многочлен $-p(x)$). Докажите, что существует такое натуральное m , при котором многочлен $Q(x) = P(x + m)$ имеет положительные коэффициенты (для этого достаточно, чтобы m было строго больше наибольшего из чисел $|b_0|, |b_1|, \dots, |b_n|$). Осталось применить результат пункта а) к многочлену $Q(x)$.

116. а) $-2 \sin \frac{7\pi}{18}; 2 \sin \frac{\pi}{18}; 2 \sin \frac{5\pi}{18}$. Выполнив замену

$x = 2 \sin \varphi$, где $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, приведите уравнение к виду

$\sin 3\varphi = \frac{1}{2}$. Последнее уравнение имеет в точности 3 корня на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

б) $-2\sin \frac{4\pi}{9}; 2\sin \frac{\pi}{9}; 2\sin \frac{2\pi}{9}$.

117. а) $(\cos \varphi, \cos 2\varphi, \cos 4\varphi)$, где $\varphi = 0; \frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}; \frac{6\pi}{7}; \frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{2\pi}{3}; \frac{8\pi}{9}$. После замены $x = \cos \varphi$, где $0 \leq \varphi \leq \pi$ система приводится к виду $y = \cos 2\varphi$, $z = \cos 4\varphi$, $\cos 8\varphi = \cos \varphi$.

б) $\operatorname{tg} \varphi, \operatorname{tg} 2\varphi, \operatorname{tg} 4\varphi$, где $\varphi = 0; \pm \frac{\pi}{7}; \pm \frac{2\pi}{7}; \pm \frac{3\pi}{7}$. Выполните замену $x = \operatorname{tg} \varphi$, где $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

в) $(\cos \varphi; \sin \varphi)$, где $\varphi = \frac{\pi}{36}; \frac{5\pi}{36}; \frac{25\pi}{36}; \frac{29\pi}{36}; \frac{49\pi}{36}; \frac{53\pi}{36}$. После замены $x = \cos \varphi$; $y = \sin \varphi$, где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, и подстановки во второе уравнение получаем уравнение

$$\sqrt{2}(\cos \varphi - \sin \varphi)(1 + 2\sin 2\varphi) = \sqrt{3},$$

которое заменой $u = \sqrt{2}(\cos \varphi - \sin \varphi)$ приводится к виду $u^3 - 3u + \sqrt{3} = 0$. Решая его (см. задачу 116, б)), находим u , а затем получаем ответ из уравнений $\sqrt{2}(\cos \varphi - \sin \varphi) = u_{1,2,3}$.

118. Пусть $x = \operatorname{tg} \alpha, y = \operatorname{tg} \beta, z = \operatorname{tg} \gamma$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Из равенства $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$ следует, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi n$, где $n = 0, n = \pm 1$. Но тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg} 2\gamma.$$

119. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ — данные положительные числа. Воспользуемся тем, что

$$\frac{x-y}{1+x+y+2xy} = \frac{\left(1+\frac{1}{y}\right) - \left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta),$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $\beta = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{y}\right)$, причем α и β принадлежат интервалу $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, так что среди чисел $\operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x_i}\right)$, $i = 1, 2, 3, 4$ найдутся два, разность которых меньше, чем $\frac{\pi}{12}$ ($\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$).

120. Индукцией по n нетрудно доказать, что $x_n = \operatorname{tg} n\alpha$, где $\alpha = \operatorname{arctg} 2$. а) при любом m имеем $x_{2m} = \frac{2x_m}{1 - x_m^2}$. Если $x_{2m} = 0$, то тогда и $x_m = 0$. Поэтому если $x_n = 0$ при $n = 2^k(2s+1)$, то и $x_{2s+1} = 0$. Но тогда $x_{2s} = -2 = \frac{2x_s}{1 - x_s^2}$, откуда $x_s = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ — иррациональное число. Противоречие. Отметим также, что $x_n \neq \frac{1}{2}$ ни при каком n (доказательство аналогично).

б) Докажем, что все члены последовательности попарно различны. Пусть $x_{m+n} = x_m$ при некоторых m и n ($m, n \geq 1$). Так как $x_n = \operatorname{tg} n\alpha$, имеем

$$\operatorname{tg}(m+n)\alpha - \operatorname{tg} m\alpha = \frac{\sin n\alpha}{\cos(m+n)\alpha \cos m\alpha} = 0,$$

откуда $x_n = \operatorname{tg} n\alpha = 0$, что невозможно (см. пункт а)).

Глава 2. Делимость целых чисел

121. Рассмотрите числа $p - 1$, p , $p + 1$.

122. $p = 3$. Если $p \neq 3$, число $14p^2 + 1$ делится на 3.

123. Если произведение P всех простых чисел, не превосходящих n , не больше n , то $P - 1 < n$ не делится ни на одно простое число $p < n$.

124. Если d — делитель числа n , то $\frac{n}{d}$ — тоже делитель.

Причем либо d , либо $\frac{n}{d}$ не больше \sqrt{n} .

125. $n^{k/2}$.

126. См. указание к задаче 124. Полезно также заметить, что при $d \geq 1$ имеет место неравенство $d + \frac{n}{d} \leq n + 1$.

127. Всякий делитель числа n имеет вид $p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$, где $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i$ ($i = 1, \dots, k$) и однозначно определяется набором

чисел $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$. Количество таких наборов равно $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$.

128. Умножьте второе равенство на mn .

129. Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{11111 \dots 111}{2^{n+1}} = \frac{111 \dots 11}{2^n} \cdot \frac{100 \dots 01}{2^n}.$$

130. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

131. Пусть $Q = \text{НОК}(1, 2, \dots, [\sqrt[k]{n}])$ – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, [\sqrt[k]{n}]$. Ясно, что

$$Q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_l^{\alpha_l},$$

где $p_1 < p_2 < \dots < p_l$ – простые числа, причем $p_l \leq \sqrt[k]{n} < p_{l+1}$. Кроме того, $p_i^{\alpha_i} \leq \sqrt[k]{n} < p_i^{\alpha_i+1} \leq p_i^{2\alpha_i}$ при $i = 1, \dots, l$. Перемножив эти неравенства, получим $n^{l/k} < Q^2$, а так как $Q \leq n$ (поскольку $k \geq 3$), то $n^{l/k} < n^2$, т.е. $l < 2k$, откуда $\sqrt[k]{n} < p_{2k}$, т.е. $n < p_{2k}^k$.

132. $n = 8, 9, 12, 18$ и $n = 8p$, где $p \geq 3$ – простое число.

Пусть $n = p^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ – разложение числа n на простые множители. Если

$$p^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} = p(\alpha + 1) \cdot (\alpha_1 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1),$$

то

$$p^{\alpha-1} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} = (\alpha + 1) \cdot (\alpha_1 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1).$$

Из того, что $p^{\alpha-1} > \alpha$ при $\alpha > 1$ и $p > 3$, а $p_i^{\alpha_i} > \alpha_i + 1$ при $p_i \geq 3$, следует, что $k \leq 1$, причем $\alpha = 1$ при $p \geq 3$. Осталось рассмотреть числа вида $2^k \cdot 3^l, 2^k p$ и $3^l p$, где $p \geq 3$.

133. n – простое, либо n – степень двойки, либо $n = 6$.

Пусть n удовлетворяет условию: числа a_1, a_2, \dots, a_k , взаимно простые с n , образуют арифметическую прогрессию. Очевидно, $a_1 = 1$, $a_k = n - 1$, $a_2 = p$ – наименьшее простое число, на которое не делится n . Если $p = 2$, то прогрессия имеет вид $1, 2, \dots, n - 1$, т.е. n – простое. Если $p = 3$, то разность прогрессии равна 2, а тогда n не имеет нечетных делителей и потому n – степень двойки. Если $p > 3$, то $n - 1 = 1 + (k - 1)(p - 1)$, откуда $n = 2 + (k - 1)(p - 1)$. Если q – простой делитель числа $p - 1$, то $q < p - 1$ и n делится на q , откуда $q = 2$, т.е. $p = 2^m + 1$, причем m четно (если m нечетно, то p делится на 3). Пусть $k > 2$. Тогда

$a_3 = 1 + 2(p - 1) = 2^{m+1} + 1$ делится на 3, но и n делится на 3, т.е. a_3 не взаимно просто с n . Поэтому $k = 2$, $n - 1 = p$, $n - 2$ и $n - 4$ — степени двойки, поскольку они не могут иметь простых нечетных делителей (эти числа меньше p), это возможно лишь при $n = 6$.

134. а) 2; б) 7.

135. 96. Две последние цифры чисел вида 4^n повторяются с периодом 10. Осталось найти последнюю цифру десятичной записи числа

$$4^{4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \} 1972 \text{ четверки}$$

Замечание. Будем писать

$$a \equiv b \pmod{m} \quad (*)$$

(читается « a сравнимо с b по модулю m », а само соотношение $(*)$ называется *сравнением по модулю m*), если $a - b$ делится на m .

Несложно проверить следующие свойства сравнений:

- 1) Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
- 2) Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ для любого c .
- 3) Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
- 4) Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $ac \equiv bc \pmod{m}$ для любого c .
- 5) Если $ac \equiv bc \pmod{m}$ и c взаимно просто с m , то $a \equiv b \pmod{m}$.
- 6) Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Использование сравнений облегчает решение некоторых задач про остатки и на делимость. Пример обращения со сравнениями приведен в указании к следующей задаче.

136. Рассмотрите степени остатков по соответствующим модулям. Например, если a не делится на 5, то $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$. Докажем это. Возводя сравнение

$$a \equiv \pm 1 \text{ или } \pm 2 \pmod{5}$$

в квадрат (см. свойство 6 сравнений), получим $a^2 \equiv 1$ или $4 \pmod{5}$, или

$$a^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}.$$

Возведя последнее сравнение в квадрат, окончательно получим

$$a^4 \equiv 1 \pmod{5}.$$

137. Пусть $n = 10a + b$, b – нечетная цифра. Тогда $n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$. Первое слагаемое не влияет на две последние цифры, во втором слагаемом – четное число десятков, а из последнего слагаемого в разряд десятков переходит четное число ($1^2 = 01$, $3^2 = 09$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$).

138. Нет. Если две последние цифры квадрата одинаковые (и отличны от нуля), то они четверки (докажите!). Если $n^2 = \dots 4444$, то $n = 2k$, но тогда $4k^2 = \dots 4444$, т.е. $k^2 = \dots 11$, что невозможно. В то же время, $12^2 = 144$, $38^2 = 1444$.

139. $(10a + 5)^2 = 100(a^2 + a) + 25$, а число $a^2 + a$ четно.

140. 6. Из утверждения задачи 137 следует, что последняя цифра квадрата – 4 или 6, причем если квадрат оканчивается четверкой, то ей предшествует четная цифра.

141. $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1} \equiv 5 \cdot 6^n + 27 \cdot 6^{n-1} \equiv 57 \cdot 6^{n-1} \pmod{19}$.

142. При $n = 11 + 22l$. $2^{2n+1} - 3 \cdot 7^n + 5^{n+1} \cdot 6^n \equiv$
 $\equiv 2(4^n + 7^n) \pmod{23}$.

143. $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$. Произведение пяти последовательных целых чисел заведомо делится на 5, на 8 и на 3.

144. $p = 5$.

145. $11^3 = 1331 \equiv 1 \pmod{133}$. Поэтому $11^{19} \equiv 11 \pmod{133}$, $11^8 \equiv 11^6 \cdot 11^2 \equiv 11^2 \pmod{133}$ и $11^{19} + 11^8 + 1 \equiv 0 \pmod{133}$.

146. Рассмотрите остатки чисел $1^2, 2^2, \dots, 18^2$ при делении на 19.

147. При нечетных n .

$$n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = ((n - 1)(n + 1))^2 (n^2 + 1)^2 (n^4 + 1).$$

148. $k = 6l + 1$.

149. $n = 2 \cdot 5^{1964}$.

$$\begin{aligned} 3^{2.5} + 1 &= (3^2 + 1 - 1)^5 + 1 = a^5 - 5a^4 + 10a^3 - 5a^2 + 5a - 1 + 1 = \\ &= a(a^4 - 5a^3 + 10a^2 - 5a + 5), \end{aligned}$$

где $a = 3^2 + 1$. Полученное выражение делится на 25, поскольку a делится на 5 и выражение в скобках тоже делится на 5 (и не

делится на 25). Рассуждая по индукции, докажите, что $3^{2 \cdot 5^n} + 1$ делится на 5^{n+1} и не делится на 5^{n+2} .

150. а) $n = 21k$; б) $n = 3 \cdot 7^{k-1}$. См. указание к предыдущей задаче.

151. $a = 1407$. Поскольку $1967 = 7 \cdot 281$ и $137 + 144 = 281$,

$$A = 137^{2k-1} + a(-137)^{2k-1} \equiv 137^{2k-1}(1 - a) \pmod{281}.$$

Итак, $a - 1 \equiv 0 \pmod{281}$, т.е. $a = 281l + 1$. В то же время, $A \equiv 4^{2k-1}(a + 1) \pmod{7}$. Значит, $a + 1 = 281l + 2 \equiv 0 \pmod{7}$, т.е. $l \equiv 5 \pmod{7}$, откуда следует, что $a = 281(7p + 5) + 2$. Наименьшее a получается при $p = 0$.

152. $n = 1$. $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$.

153. $2, 5 = 2^2 + 1, 257 = 4^4 + 1$. Число вида $n^n + 1$ может быть простым лишь при $n = 2^k$. При этом $8^8 = 2^{24} + 1 = (2^8)^3 + 1 = (2^8 + 1)(2^{16} - 2^8 + 1)$ — число составное, а $16^{16} + 1 = 2^{64} + 1 > 2^{64} = 2^4 \cdot 2^{60} = 2^4 \cdot (2^{10})^6 > 2^4 \cdot 10^{18} > 10^{19}$.

154. $p = q = 2$.

155. $n = 2$. Одно из чисел $2^n - 1$ и $2^n + 1$ делится на 3.

156. Если $p = kl$, где $k > 1, l > 1$, то

$$2^p - 1 = 2^{kl} - 1 = (2^k - 1)(2^{(k-1)l} + 2^{(k-2)l} + \dots + 1).$$

157. Если $n = 2^4 \cdot l$, где $l > 1$ — нечетное число, то

$$2^{2^4} + 1 = (2^{2^4})^l + 1 = (2^{2^4} + 1) \left((2^{2^4})^l - (2^{2^4})^{l-1} + \dots + 1 \right).$$

158. Если $k < 2^{1969}$ — количество вписанных нулей, то число окажется равным $10^{2^{1969} + k + 1} + 1$. Показатель степени $2^{1969} + k + 1$ обязательно будет иметь нечетный делитель, поскольку $2^{1969} + k + 1 < 2^{1970} + 1$.

159. Нет.

160. Число 2^{29} девятизначно. Если в его десятичной записи нет нуля, то сумма его цифр и, следовательно, само число делится на 9.

161. 46. Требуется найти наименьшее m , при котором выполняются неравенства

$$7 \cdot 10^n < 2^m < 8 \cdot 10^n,$$

где n — некоторое натуральное число.

162. Понятно, что повторяющаяся цифра может быть только четной и не нулем (такое число делится на 5). Но число 2^n не может оканчиваться на ...2222, ...4444, ...6666, ...8888, поскольку в противном случае

$$2^{n-1} = \frac{\dots 2222}{2} = \dots 111, \quad 2^{n-1} = \frac{\dots 6666}{2} = \dots 333,$$

$$2^{n-2} = \frac{\dots 4444}{4} = \dots 11, \quad 2^{n-3} = \frac{\dots 8888}{8} = \dots 1,$$

получаем, что некоторая меньшая степень двойки является нечетным числом.

163. Последняя цифра числа 2^n повторяется с периодом 4, поскольку разность

$$2^{n+4} - 2^n = 16 \cdot 2^n - 2^n = 15 \cdot 2^n$$

делится на 10. Рассмотрим четыре случая: $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$.

$n \pmod{4}$	b	$b \pmod{3}$	$2^n \pmod{3}$	$a \pmod{3}$
0	6	0	1	1
1	2	-1	-1	0
2	4	1	1	0
3	8	-1	-1	0

Как видно из приведенной таблицы, либо $b = 6$, либо a делится на 3. Но поскольку b — четная цифра, ab делится на 6 в любом случае.

164. $(2n-1)^{2n+1} + (2n+1)^{2n-1} = (2n-1)^{2n+1} + 1 + (2n+1)^{2n-1} - 1 = 2n \cdot M$, где M — четно.

165. Существуют. Это, например, числа a и $a + 1$, где

$$a = \underbrace{9\dots 9}_{13} \underbrace{799\dots 9}_{14}.$$

166. 13. Если последняя цифра числа a равна 0, 1, 2, а сумма его цифр делится на 7, сумма цифр числа $a + 7$ тоже делится на 7. Если последняя цифра числа a равна 3, а сумма цифр числа $a + 7$ при делении на 7 дает в остатке 1, то ближайшим к $a + 7$ (оно оканчивается на 0) числом с суммой цифр, делящейся на 7, будет $a + 13$. Пример: $1006 - 993 = 13$.

167. 11967, 71967, 281967, 19671967.

168. 42857.

169. 102564.

170. $8 \cdot 123\,456\,789 = 987\,654\,312$.

171. 8712.

172. 11 101 111.

173. Воспользуйтесь признаками делимости на 9 и на 11.

174. $1! + 2! + 3! = 9$. При $n > 3$ последняя цифра суммы факториалов равна 3.

175. 3. Пусть a – первая цифра десятичных записей чисел 2^n и 5^n . Тогда при некоторых k и l

$$a \cdot 10^k < 2^n < (a+1) \cdot 10^k, \quad a \cdot 10^l < 5^n < (a+1) \cdot 10^l.$$

Перемножив эти неравенства, получим

$$a^2 \cdot 10^{k+l} < 10^n < (a+1)^2 \cdot 10^{k+l},$$

т.е.

$$a^2 < 10^{n-k-l} < (a+1)^2.$$

Поскольку a – цифра, это возможно лишь при $a = 3$, $n - k - l = 1$.

176. 1972. Пусть $10^l < 2^k < 10^{l+1}$, $10^m < 5^k < 10^{m+1}$. Тогда

$$10^{l+m} < 10^k < 10^{l+m+2},$$

т.е. $k = l + m + 1$. В нашем случае $k = 1972$.

177. 10.

178. 3 и 9. Пусть k – искомое число. Тогда k нечетно и существует число a , делящееся на k и оканчивающееся на 1. Число $10a$ оканчивается на 10 и делится на k . Рассмотрим число b , полученное перестановкой 0 и 1 в десятичной записи числа $10a$. Тогда $10a - b = 9$, т.е. 9 делится на k .

179. 8. Подсчитайте сумму остатков, получаемых от деления числа n на числа, большие $n/2$, а затем оцените n .

180. Если $p = 30k + r$, где $r < 30$, то r не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, а все такие r – простые.

181. Нет. Дискриминант трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ равен $D = b^2 - 4ac$. Рассмотрите остатки от деления числа D на 8.

182. $1734 = 2 \cdot 17 \cdot 34$, $1352 = 4 \cdot 13 \cdot 52$. Пусть x и y – искомые двузначные числа. Тогда $100x + y = kxy$, т.е. $100x = (kx - 1)y$, откуда следует, что y делится на x , причем их частное $l = y/x$ меньше 9 и является делителем числа 100.

183. 1641.

184. На первом, втором или последнем местах. Если вычеркиваемая цифра b стоит на n -м месте, то число можно записать так: $a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + c$ (здесь $a \geq 1$, $1 \leq c \leq 9 \cdot 10^{n-2} - 1$), а

число с вычеркнутой цифрой b имеет вид $10^{n-1}a + c$. Отношение

$$\frac{a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + c}{10^{n-1}a + c} = 10 + \frac{b \cdot 10^{n-1} - 9c}{10^{n-1}a + c}$$

при $a \geq 10$ не является целым числом (числитель последней дроби не равен нулю и по модулю меньше знаменателя). Несколькими уточнив проведенное рассуждение, можно доказать, что вычеркиваемая цифра при $n \geq 4$ должна быть нулем.

185. Пусть $10^{100}(10^{99} - 1) < A^2 < 10^{199}$, тогда

$$\sqrt{10^{199} - 10^{100}} < A < \sqrt{10^{199}}. \quad (*)$$

Но

$$\begin{aligned} \sqrt{10^{199}} - \sqrt{10^{199} - 10^{100}} &= \\ &= \sqrt{10^{199}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{10^{99}}} \right) = \frac{\sqrt{10^{199}} \cdot \frac{1}{10^{99}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{10^{99}}}} > \frac{\sqrt{10}}{2} > 1. \end{aligned}$$

Это значит, что найдется целое число A , удовлетворяющее неравенству (*). Попутно мы установили, что за A можно

принять $\left[\sqrt{10^{199}} \right] = \left[10^{98} \sqrt{10} \right]$.

186. Ни $P_n - 1$, ни $P_n + 1$ не делятся ни на одно простое число, не большее, чем $\sqrt{P_n}$.

187. $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. N не делится ни на одно из чисел p_1, p_2, \dots, p_n и, следовательно, либо само N — простое, либо его простой делитель больше всех p_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

188. Всякий простой делитель числа $n! - 1$ больше n .

189. Предположим, что множество простых чисел вида $4n + 3$ конечно. Пусть p_1, p_2, \dots, p_m — все такие числа. Число $N = 4p_1 p_2 \dots p_m - 1$ не делится ни на одно из p_i и, следовательно, поскольку оно является числом вида $4n + 3$, имеет простой делитель такого же вида, отличный от всех p_i . Для чисел вида $6n + 5$ рассуждения аналогичны.

190. Предположим, что число N^2 представимо в виде $N^2 = p + n^{2k}$. Тогда $N - n^k = 1$, а $N + n^k = p$, т.е. $p = 2n^k + 1$. Существует бесконечно много пар $(n; k)$, для которых число $2n^k + 1$ — не простое. Так что существует бесконечно много квадратов, не представимых в требуемом виде.

191. Пусть $F_n = 2^{2^n} + 1$. Рассмотрим произведение

$$1 \cdot F_0 F_1 \dots F_n = (2^{2^0} - 1) (2^{2^0} + 1) (2^{2^1} + 1) \dots (2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1 = \\ = F_{n+1} - 2.$$

Никакой простой делитель чисел F_i при $1 \leq i \leq n$ не является делителем числа F_{n+1} .

192. Это, например, числа

$$2 + (n+1)!, \quad 3 + (n+1)!, \quad \dots, \quad (n+1) + (n+1)!.$$

193. Воспользуйтесь так называемой «китайской теоремой об остатках».

Китайская теорема об остатках. Пусть даны попарно взаимно простые натуральные числа m_1, m_2, \dots, m_n и целые неотрицательные числа r_1, r_2, \dots, r_n такие, что $0 \leq r_i \leq m_i - 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Существует m последовательных натуральных чисел $N, N+1, \dots, N+n-1$ таких, что $N+i \equiv r_{i+1} \pmod{m_{i+1}}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Из этой теоремы следует, что при $m_1 = 2^2, m_2 = 3^2, \dots, m_n = p_n^2$ ($p_n - n$ -е простое число) и $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$ существуют числа $N, N+1, \dots, N+n-1$ такие, что N_i делится на $m_{i+1} = p_{i+1}^2$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

194. Пусть $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Тогда после приведения суммы дробей к общему знаменателю числитель полученной дроби окажется нечетным, а знаменатель – делящимся на 2^k .

195. Утверждение следует из тождеств

$$\frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1}, \quad \frac{1}{p-2} + \frac{1}{2} = \frac{p}{2(p-2)}, \quad \dots \\ \dots, \quad \frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}} = \frac{4p}{p^2-1}.$$

После сложения получаем

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = p \left(\frac{1}{1 \cdot (p-1)} + \frac{1}{2 \cdot (p-2)} + \dots + \frac{1}{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}} \right).$$

196. Нет. Пусть $n_i = 3^k \leq n_{1971} < 3^{k+1}$. После приведения

суммы дробей к общему знаменателю получится дробь с числителем, не делящимся на 3.

197. По условию

$$a = k_1 b + r_1,$$

$$b = k_2 r_1 + r_2,$$

.....

$$r_{n-2} = k_{n+1} r_{n-1} + r_n,$$

$$r_{n-1} = k_{n+2} r_n.$$

Поскольку последовательность r_i убывающая, она в конце концов оборвется, но это и значит, что при некотором n остаток r_{n-1} делится на r_n . Но и $r_{n-2}, r_{n-3}, \dots, a$ и b делятся на r_n , т.е. r_n — общий делитель чисел a и b . С другой стороны, r_n делится на каждый общий делитель чисел a и b . Поэтому $r_n = \text{НОД}(a, b)$.

198. Существует в точности $\left[\frac{n}{p^k} \right]$ чисел, не превосходящих n и делящихся на p^k . Поэтому максимальная степень простого числа p , на которую делится $n!$, в точности равна

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k} \right],$$

где $p^k \leq n < p^{k+1}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{199.} \quad & \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k} \right] < \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \dots + \frac{n}{p^k} + \dots = \\ & = \frac{n}{p-1} \leq n. \end{aligned}$$

200. Пусть p — простое число, не превосходящее n . Число $(n!)^{(n-1)!}$ делится на p^k , где

$$k = (n-1)! \left(\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots \right).$$

С другой стороны, $(n!)!$ делится на p^l , где

$$l = \left[\frac{n!}{p} \right] + \left[\frac{n!}{p^2} \right] + \dots$$

Но $[ma] \geq m[a]$ при натуральном m и положительном a . Поэтому $l \geq k$. Отсюда и следует утверждение задачи.

201. а) Если n — простое число, $n = 4$; б) если $n = p$, $n = 2p$ (p — простое число), $n = 8$, $n = 9$.

202. Ясно, что p – простое. Если же $p \leq n/2$, то $2p \leq n$.

203. Если $p = ab$ – составное число, то $(p-1)! + 1$ не делится на a .

Пусть теперь p – простое число. Пусть $a(1 \leq a \leq p-1)$ – натуральное число. Докажите, что при $a \neq 1$, $a \neq p-1$ среди чисел $2, 3, \dots, p-2$ найдется такое a' , что $a'a \equiv 1 \pmod{p}$. В произведении $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)$ объединим в пары сомножители 2 и $2'$, 3 и $3'$ и т.д. Такие произведения дают при делении на p остаток 1 . Без пары остаются числа 1 и $p-1$. Поэтому

$$(p-1)! \equiv p-1 \pmod{p},$$

т.е. $(p-1)! + 1$ делится на p .

204. Если a делится на p , утверждение очевидно. Если a не делится на p , выпишем числа $a, 2a, \dots, (p-1)a$. Все эти числа дают различные остатки при делении на p . Поэтому

$$a \cdot 2a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p},$$

отсюда $a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}$. Поэтому (см. свойство 5 сравнений, с. 85) $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

205. Пусть n – составное число, а число a взаимно просто с n . Рассмотрите все возможные остатки от деления чисел на n , взаимно простые с n :

$$r_1 = 1, r_2, \dots, r_{\varphi(n)}$$

(это все числа, меньшие n и взаимно простые с ним). Умножим все числа выписанной строчки на a :

$$a, ar_2, \dots, ar_{\varphi(n)}.$$

Все эти числа по-прежнему взаимно просты с n и дают при делении на n различные остатки, т.е. вторая строчка отличается от первой лишь порядком чисел. Перемножив числа первой и второй строчек, получаем сравнение

$$r_1 r_2 \dots r_{\varphi(n)} \equiv a^{\varphi(n)} r_1 r_2 \dots r_{\varphi(n)} \pmod{n},$$

или

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Малая теорема Ферма является следствием теоремы Эйлера при $n = p$.

206. а) $p^k - p^{k-1}$.

б) Выпишем натуральные числа от 1 до mn :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \dots & n & & & \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n & & & \\ & & \dots & & & & \\ & & \dots & (m-1)n & & & \\ & & & n(m-1)+1 & \dots & mn & \end{array}$$

В этой таблице имеется в точности $\varphi(n)$ столбцов, состоящих из чисел, взаимно простых с n . В каждом столбце стоит арифметическая прогрессия длины m с разностью n . Все остатки от деления на m чисел столбца различны (это следует из взаимной простоты чисел m и n). Поэтому среди них в точности $\varphi(m)$ чисел, взаимно простых с m . Поэтому в таблице в точности $\varphi(m)\varphi(n)$ чисел взаимно простых с mn .

$$\begin{aligned} \text{в) } \varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) &= \varphi(p_1^{\alpha_1}) \varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \varphi(p_k^{\alpha_k}) = \\ &= (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) \dots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}) = \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \end{aligned}$$

207. Поскольку $p^3 - 1 = (p-1)(p^2 + p + 1)$, а q — простое число, большее $p-1$, имеем $p^2 + p + 1 = kq$ (k — натуральное число). Из того, что $q = lp + 1$ и $p^2 + p + 1 = k(lp + 1)$, следует, что $k-1$ делится на p , т.е. $k = sp + 1$. Но тогда $p^2 + p + 1 = (sp + 1)q$ и потому $p^2 + p + 1 \geq (sp + 1)(p + 1)$, что возможно лишь при $s = 0$, т.е. при $k = 1$.

Заметим, что мы не пользовались простотой числа p , так что это условие можно снять.

Пример: $p = 6$, $q = 43$, $p^3 - 1 = 215 = 5 \cdot 43$, $a - 1 = 42 : p$, $43 = 6^2 + 6 + 1$.

208 и **209.** Таким свойством обладают все числа вида $9n + 5$ и $8n + 7$ соответственно.

210. $1967 \equiv 7 \pmod{8}$.

211. Предположим, что все остатки чисел $a_i + b_i$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) от деления на $2n$ различны. Их сумма равна

$$1 + 2 + \dots + 2n = n(2n + 1) \equiv n \pmod{2n},$$

т.е. не делится на $2n$. С другой стороны, эта сумма дает при

делении на $2n$ такой же остаток, что и сумма

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = 2n(2n+1) \equiv 0 \pmod{2n}.$$

Противоречие.

212. Период 20. Докажите, что наименьший период делится на 10 и не равен 10, а

$$\frac{(n+20)(n+21)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod{10}.$$

213. Период 20. Воспользуйтесь тем, что последние цифры чисел n и n^5 совпадают.

214. Разность равна 30.

215. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — числа, записанные в первой строке, S — их сумма. Имеем:

$$(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{n-1} + a_n) = 2S - a_1 - a_n.$$

Примените преобразование, при помощи которого получается очередная строка таблицы к этим числам.

216. Воспользуйтесь равенством $u_{n+5} = 5u_{n+1} + 3u_n$.

217. Докажите, что $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$.

218. Докажите, что остатки от деления a_n на 4 повторяются при $n > 1$ с периодом 3, т.е. что $a_{n+3} \equiv a_n \pmod{4}$ при $n \geq 2$. Воспользуйтесь тем, что число $2^{1968} - 1$ делится на 3.

219. Остаток от деления на 11 количества полученных частей не меняется, но $20 \not\equiv 1968 \pmod{11}$.

220. Разность прогрессии должна делиться на 2, 3, 5, 7, 11, 13, т.е. $d \geq 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 13 > 30000$.

221. Если $l^2 < k$, а $(l+1)^2 > 2k$, то $l^2 - l - 1 < 0$, т.е. $l < 1 + \sqrt{2}$. Для $k = 1$ утверждение очевидно.

222. Можно. Это, скажем, числа $2, 2^3, 2^5, \dots, 2^{2n-1}$. Максимальная степень двойки, на которую делится сумма любых чисел из этого множества, нечетна.

223. а), б). Нельзя. Докажите, что остаток от деления на 4 суммы всех имеющихся на доске чисел не меняется.

224. При $n \equiv 5 \pmod{23}$. Поскольку $7(4n+5) - 4(7n+3) = 23$, любой общий делитель числителя и знаменателя — делитель числа 23. Выясним, при каких n числитель (а следовательно, и знаменатель) делится на 23. Имеем: $4n + 3 = 23k$. Это равенство выполняется при $n = 5$ и $k = 1$: $4 \cdot 5 + 3 = 23 \cdot 1$. Но тогда $4(n-5) = 23(k-1)$, откуда следует, что $n = 5 + 23l$, где l — целое.

225. При $n = -3, -1, 0, 1, 2$. Воспользуйтесь равенством

$$\frac{n^5 + 3}{n^2 + 1} = \frac{n^5 + n^3 - n^3 - n + n + 3}{n^2 + 1} = n^3 - n + \frac{n + 3}{n^2 + 1},$$

а также тем, что $0 < \left| \frac{n + 3}{n^2 + 1} \right| < 1$ при $|n| > 2, n \neq -3$.

226. Воспользуйтесь равенством

$$3(7m + 18n) - 7(3m + 5n) = 19n.$$

227. Пусть каждый член профсоюза получал x слонов, а не член профсоюза — y слонов. Всего было роздано $N = 28x + 37y$ слонов. Так как $N = 28(x - 37) + 37(y + 28) = 28(x + 37) + 37(y - 28)$, то при выполнении любого из двух условий $x \geq 37$ или $y \geq 28$ существует по меньшей мере два способа раздачи. Итак, $x \leq 36, y \leq 28$, и наибольшее возможное количество слонов равно $N = 28(37 - 1) + 37(28 - 1) = 2007$. (Вообще, наибольшее натуральное число N , представимое единственным образом в виде $ax + by$, где a и b натуральные, а x и y — целые неотрицательные числа, равно $a(b - 1) + b(a - 1)$.)

228. Если ни a , ни b не делятся на 3, то $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $b^2 \equiv 1 \pmod{3}$, следовательно, $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{3}$ и, значит, $a^2 + b^2$ не может быть квадратом. Если a и b нечетны, то $a^2 + b^2$ четно, но не делится на 4. Если $a = 4k + 2$, а b — нечетно, то $a^2 + b^2 \equiv 5 \pmod{8}$ и $a^2 + b^2$ — не квадрат. Если c не делится на 5, то одно из чисел a или b делится на 5.

229. Пусть $121k + 8 = l(l + 1)$. Число $l^2 + l - 8$ делится на 11, а так как $l^2 + l - 8 = (l - 5)^2 + 11l - 33$, получаем, что $l = 11m + 5$. Но в таком случае число $l^2 + l - 8 = 121(m^2 + m) + 22$ не делится на 121.

230. При $k = 22p^2 + 30p + 10$ и $k = 22p^2 + 14p + 2, p$ — целое. Пусть $22k + 5 = m^2$. Докажите, что $m = 11l \pm 4$, а затем найдите подходящие значения l .

231. 48. Пусть $a^2 + a + 1969 = m^2$. Тогда

$$(2m)^2 - (2a + 1)^2 = 7875 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 = A,$$

т.е. $(-2a - 1 + 2m)(2a + 1 + 2m) = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$.

Отсюда следует, что $-(2a + 1) + 2m = u, 2a + 1 + 2m = v$, где u и v — делители числа A ($uv = A$). Заметим, что так как A дает остаток 3 при делении на 4, числа u и v дают при делении на 4

разные остатки и потому из уравнений

$$2a + 1 = \frac{v - u}{2} \text{ и } 2m = \frac{u + v}{2}$$

находятся целые числа a и m , причем разным разложениям A на множители соответствуют различные значения a . Число же таких разложений (множители могут быть и отрицательными: если $uv = A$, то и $(-u)(-v) = A$) равно удвоенному количеству делителей A .

232. Уравнение $t^2 + t - 1 = 0$ $\left(t = \frac{x}{y}\right)$ не имеет рациональных корней.

233. а) $(x, y) = (0, 0), (2, 1)$. Из равенства $3^x = (y + 1)(y^2 - y + 1)$ следует, что $y + 1 = 3^k$. Если $y \neq 0$, число $y^2 - y + 1$ делится на 3 и не делится на 3^2 .

б) $(1, 1), (2, 3)$. Если $3^x - 1 = 2^y$, причем $x \neq 1$, то x — четное число, т.е. $x = 2k$, но тогда $3^k - 1 = 2^l$, $3^k + 1 = 2^m$, откуда $2^m - 2^l = 2$, что возможно только при $m = 2, l = 1$.

в) $(0, 0), (1, 1)$. Воспользуйтесь равенством $(1 + x)(1 + x^2) = 2^y$, из которого следует, что $1 + x = 2^l$, $1 + x^2 = 2^m$, где $l + m = y$.

234. а) Рассмотрите остатки от деления x и y на 3.

б) Рассмотрите остатки от деления x и y на 9.

в) Докажите, что x, y и z делятся на 13.

235. $m = n = 0$. Если $n = t^2$, то $t^2 < t^2 + t < (t + 1)^2$, так что уже $\sqrt{n + \sqrt{n}}$ — не целое число.

236. а) Пусть $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, где $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ при $i = 1, 2, \dots, k$. Из равенства $x^n = y^m$ следует, что $n\alpha_i = m\beta_i$, и из взаимной простоты m и n следует, что $\beta_i = \gamma_i n$, $\alpha_i = \gamma_i m$, но тогда $x = p_1^{\gamma_1 m} p_2^{\gamma_2 m} \dots p_k^{\gamma_k m} = t^m$, $y = t^n$, где $t = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$.

б) $a = t^m, b = t^n$, где m, n и $t > 0$ — целые числа.

237. а) $x = y$. Предположив, что $x > y$, получаем $x^x - y^x - (x^y - y^y) = (x - y) \cdot M$, где $M > 0$.

б) $x = y$. Воспользуйтесь результатом задачи 236, а).

238. а) $x = \frac{2k - 1}{1 - k^2}, y = \frac{k^2 - k + 1}{1 - k^2}$, где $k \neq \pm 1$ — рациональное число. Поскольку $(0, 1)$ — рациональное решение данного уравнение, положим $y = kx + 1$, где k — рациональное число. Подставим это выражение в уравнение и выразим x через k .

Если, наоборот, (x, y) – решение, то $y - 1 = kx$, где k – рациональное число.

б) Пусть

$$8a^2 - 2a - 3 = x^2, \quad (*)$$

где x – рациональное число. Заметьте, что $a = 2$, $x = 5$ – решение уравнения $(*)$. Введите рациональный параметр k по формуле $k(a - 2) = x - 5$.

239. Заметим, что $x = 9$, $y = 4$ – решение данного уравнения. Пусть $(9 + 4\sqrt{5})^n = A_n + B_n\sqrt{5}$. Целые числа A_n и B_n удовлетворяют уравнению, так как

$$1 = (9 - 4\sqrt{5})^n (9 + 4\sqrt{5})^n = (A_n - B_n\sqrt{5})(A_n + B_n\sqrt{5}) = A_n^2 - 5B_n^2.$$

240. а) Пусть $x - y = t$. Тогда $y = x - t$ и

$$t(6x + 1) = x^2 + 3t^2. \quad (*)$$

Если p – простой делитель числа t , то x делится на p и, следовательно, правая часть $(**)$ делится на четную степень p . Поэтому всякий простой делитель t входит в его разложение на простые множители в четной степени.

Решение б) аналогично а).

в) Приведем уравнение к виду

$$3(4x + 1)^2 = 2(6y + 1)^2 + 1,$$

или $3p^2 - 2q^2 = 1$, где $p = 4x + 1$, $q = 6y + 1$. Одно из решений этого уравнения $p = q = 1$ (ему соответствуют значения $x = y = 0$). По аналогии с решением задачи 119 докажите, что числа p_n и q_n , определяемые при $n \geq 0$ равенством

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n+1} = p_n\sqrt{3} + q_n\sqrt{2}$$

– тоже решения уравнения $(*)$, которым не обязательно соответствуют целые значения x и y . Однако, записав соотношение

$$\begin{aligned} p_{n+1}\sqrt{3} + q_{n+1}\sqrt{2} &= (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2(n+1)+1} = \\ &= (5 + 2\sqrt{6})(p_n\sqrt{3} + q_n\sqrt{2}) = (5p_n + 4q_n)\sqrt{3} + (6p_n + 5q_n)\sqrt{2}, \end{aligned}$$

получим, что $p_{n+1} = 5p_n + 4q_n$, $q_{n+1} = 6p_n + 5q_n$. Пользуясь этими соотношениями, убедитесь, что $p_{n+2} \equiv p_n \pmod{4}$, а $q_{n+2} \equiv q_n \pmod{6}$. А поскольку $p_0 = q_0 = 1$, то и $p_{2n} \equiv 1 \pmod{4}$, $q_{2n} \equiv 1 \pmod{6}$, т.е. этим числам соответствуют целые значения x и y . Например, при $n = 2$ получаем $x = 22$, $y = 18$.

Глава 3. Разные задачи

241. 10 часов.

242. 14.

243. $1/2$.

244. а) Выстроим восьмиклассников по росту, начиная с самого низкого. Для k -го по росту восьмиклассника найдутся k семиклассников, которые ниже его.

б) Сводится к задаче а): достаточно провести те же рассуждения для любых двух колонн.

245. Каждый раз число пустых ящиков увеличивается на $k - 1$, наполненных – на 1. Вначале (когда не было ни одного заполненного ящика) был один пустой ящик. Когда заполненных ящиков будет m , пустых ящиков будет $1 + (k - 1)m$.

246. а) Согласно правилу, по которому составляется последовательность, общее количество чисел $1, 3, 3^2, \dots, 3^{m-1}$ (делителей числа 3^{m-1}) в последовательности равно 3^{m-1} , общее количество чисел $1, 3, 3^2, \dots, 3^m$ (делителей числа 3^m) – равно 3^m . Поэтому число 3^m встречается

$$3^m - 3^{m-1} = 2 \cdot 3^{m-1} \text{ раз,}$$

т.е. столько раз, сколько существует натуральных чисел, меньших 3^m и не делящихся на 3.

б) Докажем, что каждое натуральное число n встречается в этой последовательности столько раз, сколько существует чисел, меньших n и взаимно простых с ним, т.е. $\varphi(n)$ раз (о функции $\varphi(n)$ – см. задачу 206).

Будем рассуждать по индукции. Начало индукции очевидно – достаточно рассмотреть несколько первых членов последовательности: 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, ... Пусть утверждение справедливо для всех $m < n$. Докажем, что оно справедливо и для n . Рассмотрим правильные дроби

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}.$$

Среди них $\varphi(n)$ несократимых. Пусть d – делитель числа n , а $d_1 = \frac{n}{d}$. Выпишем дроби, числители которых делятся на d_1 . После сокращения этих дробей на d_1 получается такой ряд дробей: $\frac{1}{d}, \frac{2}{d}, \dots, \frac{d}{d}$. Среди этих дробей в точности $\varphi(d)$ несократимых, т.е. столько, сколько раз по предположению индукции выписано число d .

Отсюда следует, что если $d_1 = 1, d_2, \dots, d_n = n$ – все делители числа n , то после сокращения среди n уже несократимых дробей окажется $\varphi(1), \varphi(d_2), \dots, \varphi(n)$ дробей со знаменателями $1, d_2, \dots, n$. Так как все эти дроби *различны*, то

$$\varphi(1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(n) = n.$$

Из сказанного и предположения индукции следует, что в нашей последовательности число n записано

$$\varphi(n) = n - \varphi(1) - \varphi(d_2) - \dots - \varphi(d_{k-1}) \text{ раз.}$$

247. Нетрудно видеть, что при четном n на месте могут остаться только два «противоположных» числа k и $k + \frac{n}{2}$ ($k < \frac{n}{2}$), а при нечетном n – только одно какое-то число k . Все остальные можно разбить на пары (симметрично относительно диаметра, проходящего через k) и поменять местами, затратив на это $\frac{n-2}{2}$ (при четном n) или $\frac{n-1}{2}$ (при нечетном n) ходов. Поскольку одним ходом мы можем поставить на свои места не более двух чисел, меньшим числом ходов обойтись нельзя.

248. Каждая операция над строкой или столбцом, где сумма чисел отрицательна, увеличивает сумму чисел в таблице, а всего разных таблиц, которые можно получить заменами знаков, конечное число. Таким образом, после нескольких таких замен мы придем к таблице, с которой уже невозможно проделать эту операцию.

249. Расположим данные 35 чисел по окружности.

Рассмотрим сначала случай, когда из данных чисел можно выбрать одно, большее всех остальных. Обозначим его через M . Увеличим на единицу 23 числа, начиная со следующего после M по часовой стрелке, затем следующие 23 числа (по часовой стрелке) и затем следующие за ними 23 числа. Поскольку $2 \cdot 35 - 3 \cdot 23 = 1$, в результате все числа, кроме M , увеличатся на 3, а M – на 2.

Рассмотрим теперь случай, когда среди чисел k самых больших. Переставим числа на окружности так, чтобы эти k чисел стояли подряд. Увеличим на единицу 23 числа, начиная со следующего после k самых больших по часовой стрелке, затем следующие 23 числа (по часовой стрелке) и т. д., повторив эту операцию $3k$ раз. Поскольку $2k \cdot 35 - 3k \cdot 23 = k$, в результате k самых больших чисел увеличатся на $2k - 1$, а остальные – на $2k$.

Повторяя такие операции, можно за несколько шагов умень-

шить разницу между наибольшим и наименьшим из 35 чисел до нуля.

250. В первом кошельке было $A - \frac{A}{(n-1)^2}$ рублей, во втором — $A + \frac{A}{(n-1)^2}$ рублей, в остальных — по A рублей.

Во всех кошельках (кроме первого) после того, как из них берут $\frac{1}{n}$ оказавшейся там суммы, остается A рублей, следовательно, перекладываемая сумма во всех случаях (кроме сумм, перекладываемых из первого кошелька во второй) равна $\frac{A}{n-1}$. Таким образом, во всех кошельках, кроме первого и второго, сумма денег в результате перекладываний не может измениться. Определить первоначальные суммы денег в первом и во втором кошельке теперь нетрудно.

251. а) Назовем самый большой ящик ящиком ранга n , следующие по величине два ящика — ящиками ранга $n-1$, и т. д. до ящиков ранга 1, в которых лежат монеты. Разность числа орлов и решек в каком-нибудь ящике назовем дефектом этого ящика. Дефект самого большого ящика назовем общим дефектом и обозначим через d . Если мы докажем, что всегда найдется ящик, при переворачивании всех монет в котором общий дефект уменьшается по крайней мере вдвое, то задача будет решена, поскольку $|d| \leq 2^n$ и d всегда четно. Предположим, что общий дефект положителен и при переворачивании монет в любом ящике уменьшается по модулю меньше чем вдвое. Тогда дефект d' каждого ящика удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{d - 2d'}{d} \right| > \frac{1}{2}.$$

(Мы пользуемся тем, что общий дефект d при переворачивании всех монет в ящике с дефектом d' меняется на $2d'$.) Таким образом, или $d' < d/4$, или $d' > 3d/4$. С другой стороны, дефект каждого ящика ранга 1 не больше $3d/4$ ($\frac{3d}{4} > 1$, поскольку d четно), значит, $d' < d/4$. Отсюда следует, что дефект ящика ранга 2 не больше $d/2$, а значит, меньше $d/4$, отсюда, в свою очередь, получается, что дефект любого ящика ранга 3 меньше $d/4$, и т.д. Мы пришли к противоречию: с одной стороны, дефект ящика ранга n меньше $d/4$, с другой — он просто равен d , и $d > 0$.

б) $2^n - 1$.

252. Зафиксируем положение портрета отца. Из исходного положения портретов мы можем, совершая движение по часовой стрелке, «перегнать» любой портрет так, что портрет сына окажется рядом с портретом отца. После этого предписанными перестановками выстраиваем остальные портреты в любом наперед заданном порядке, а затем, двигаясь против часовой стрелки, ставим на нужное место портрет сына.

Замечание. В задачах, где речь идет о каких-то процессах или операциях, которые можно проделывать многими разными способами, как правило, не нужно следить за всеми мелочами. Так же как в физических задачах, где речь идет о движении сложной системы, обычно бывает достаточно следить за некоторыми основными параметрами: энергией, импульсом и т.д., так и в математических задачах о процессах очень часто нужно выбрать одну какую-нибудь величину в качестве «основной наблюдаемой» и следить за ее изменением. В задаче 248 такую роль играла сумма всех чисел таблицы; в задаче 249 – разность между наибольшим и наименьшим из данных чисел, в задаче 251, а) – общий дефект; в задаче 251, б) удобно следить за тем, как меняется число ящиков ранга 2 с дефектом 0 и т.д.

Помните, как доказывается, что нельзя поднять себя за волосы, как это делал барон Мюнхгаузен? В системе, на которую не действуют внешние силы, сохраняется импульс! Точно так же в математических задачах, где нужно доказать, что получить какой-то результат после ряда операций заведомо невозможно, часто можно найти такую величину или такие свойства системы, которые сохраняются при всех операциях, описываемых в условии задачи. Посмотрите, например, решение задачи 253.

253. Четность суммы выписанных на доске чисел при выполнении разрешенной операции не изменяется. Осталось заметить, что вначале эта сумма равна нечетному числу:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1965 = \frac{1965 \cdot 1966}{2} = 1965 \cdot 983.$$

254. Только при $n = 2^1, 2^2, 2^3, \dots$

Эта задача эквивалентна следующей обратной задаче. В один из n стаканов налито A мл воды, остальные пустые. Из каждого стакана разрешается переливать половину имеющейся в нем воды в любой другой стакан. Требуется определить, при каких n можно разлить воду поровну по всем стаканам.

Докажите, что после любого числа переливаний количество воды в любом стакане имеет вид $\frac{k}{2^l} A$ мл, где k и l – некоторые натуральные числа. Поскольку при n , не являющемся степенью двойки, $\frac{1}{n} \neq \frac{k}{2^l}$, то при этих n разлить воду поровну по всем стаканам нельзя.

255. Запишем вместо плюсов плюс единицы, а вместо минусов – минус единицы. Описанная процедура теперь выглядит так: стираются два рядом стоящие числа и вместо них вписывается их произведение.

а) Достаточно заметить, что за два шага числа, стоящие на нечетных (соответственно, четных) местах, преобразуются как предписано правилами, т.е. на соответствующих местах оказываются вписанными их произведения. Далее применим индукцию по k .

б) Перед тем, как все числа стали единицами, должны на всех местах стоять минус единицы, а перед этим минус и плюс единицы должны чередоваться. Но это при нечетном n невозможно.

в) $n = 2^k (2l + 1)$, причем расстановка плюсов и минусов должна быть «периодической», т.е. состоять из следующих друг за другом $2l + 1$ одинаковых групп по 2^k плюс и минус единиц. Для доказательства нужно доказать индукцией по k , что через каждые 2^k шагов числа, попарно отстоящие друг от друга на 2^k (т.е. первое, $(2^k + 1)$ -е, $(2 \cdot 2^k + 1)$ -е, и т.д.), преобразуются так же, как набор из $2l + 1$ единиц и минус единиц.

256. Прежде всего заметим, что если четные числа заменить на $+1$, а нечетные на -1 , то указанное в задаче преобразование над знаками чисел в точности соответствует преобразованию строки $+1$ и -1 из предыдущей задачи. Значит, через несколько шагов все полученные нами числа будут четными: это соответствует тому, что строка будет состоять из одних 1 . С другой стороны, самое большое из чисел при операции, указанной в задаче, не может расти. Этих указаний достаточно для решения задачи. Полное доказательство можно записать, например, так: для ряда из одних нулей утверждение очевидно; предположим, что для всех рядов, составленных из чисел, меньших 2^{m-1} , утверждение доказано, и докажем его для произвольного ряда чисел, меньших 2^m ($m \geq 1$). Мы знаем, что через несколько шагов этот ряд превратится в ряд из четных чисел: $2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{2^n}$,

где каждое число меньше 2^m , т.е. каждое b_k меньше 2^{m-1} . Но мы предположили по индукции, что ряд b_1, b_2, \dots, b_{2^n} , где все числа меньше 2^{m-1} , через несколько шагов станет нулевым. Ясно, что то же самое произойдет и с рядом $2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{2^n}$.

257. Если $a + kd \leq 10^n < a + (k+1)d$, причем $d < 10^n$, где $k < n$, то $a + (k+1)d < 2 \cdot 10^n$.

258. Вот один из способов. Разобьем ряд натуральных чисел на такие куски:

$$\hat{1}; \quad \overbrace{2, 3}; \quad \overbrace{4, 5, 6}; \quad \overbrace{7, 8, 9, 10}; \quad \overbrace{11, 12, 13, 14, 15}; \quad \dots$$

и будем по очереди относить эти куски то к одному множеству, то к другому. Количество чисел в n -м куске равно n , поэтому если разность бесконечной арифметической прогрессии равна d , то начиная с d -го куска ни один кусок не втиснется между двумя соседними членами прогрессии.

259. Отметьте красным карандашом те члены последовательности, для которых все начинающиеся с них последовательности конечной длины принадлежат первому классу, и синим карандашом — те члены последовательности, для которых все начинающиеся с них последовательности принадлежат второму классу; остальные оставим неотмеченными. Рассмотрите три случая (хотя бы один из которых имеет место):

- 1) красных отметок бесконечное количество;
- 2) синих отметок бесконечное количество;
- 3) начиная с некоторого места, никаких отметок нет.

260. В любом разряде одиннадцати бесконечных десятичных дробей стоит набор из одиннадцати цифр, среди которых наверняка есть две одинаковых цифры. Разрядов бесконечное количество. Значит, какой-то набор повторяется бесконечно много раз. Соответствующие совпадающим цифрам дроби удовлетворяют условию.

261. а) Выберем одного из этих шести человек, назовем его A . Если A знаком по крайней мере с тремя, то либо эти трое не знакомы между собой, либо найдется тройка попарно знакомых (A и еще двое). Если A знаком не более чем с двумя, то либо остальные трое знакомы между собой, либо найдется тройка попарно незнакомых (A и еще двое из тех, с кем он не знаком).

б) Для каждого математика найдутся шесть математиков, с которыми он переписывается на одном языке, скажем, на английском. Если из этих шести какие-то двое переписываются по-английски, то все доказано. Если все шестеро переписываются

между собой только по-французски или по-русски, то дело сводится к предыдущей задаче.

262. Если кто-то из мушкетеров должен драться не более чем с двумя, т.е. у него не менее шести друзей, то можно воспользоваться результатом задачи 261,а). Если кто-то должен драться с четырьмя или более, то тоже все ясно. Случай, когда каждый должен драться ровно с тремя, невозможен, потому что число дуэлей $\frac{9 \cdot 3}{2}$ получается при этом не целым.

263. Рассмотрим того участника, который сыграл наибольшее количество партий. Тогда каждый из k шахматистов, с которыми он встречался, сыграл не более $10 - k + 1 = 11 - k$ партий (из этих k шахматистов никакие двое не играли между собой). Каждый из остальных $10 - k$ шахматистов сыграл не более k партий. Поэтому общее число сыгранных партий не превосходит

$$\frac{1}{2}(k + k(11 - k) + (10 - k)k) = k(11 - k).$$

При целых $k \geq 0$ это число не больше 30.

264. Докажите последовательно следующие утверждения:

1) Город A , в который ведет наибольшее число путей из других городов, легко доступен.

2) Выделим города, в которые можно попасть из B , и среди них выберем город A , в который ведет наибольшее число путей из выделенных городов. Тогда B легко доступен.

3) Выделим города, в которые можно попасть из B (почему они есть?), и среди них выберем город C , в который ведет наибольшее число путей из выделенных городов. Тогда C легко доступен. Уже для 4-х городов можно так устроить сообщение, что четырех легко доступных городов не будет. Так, на рисунке 36 город D таковым не является.

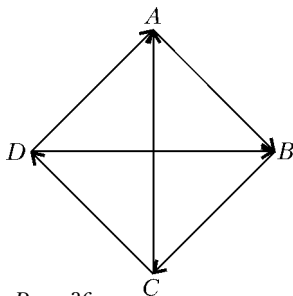


Рис. 36

265. Рассадим рыцарей как-то за круглым столом. Покажем, что если где-то рядом сидят два врага A и B (A

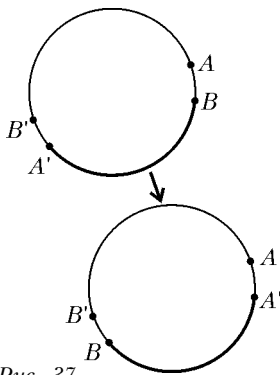


Рис. 37

сидит после B по часовой стрелке), то можно пересадить рыцарей так, что число пар сидящих рядом врагов уменьшится. Для этого найдем место, где после A' (друга A) сидит B' (друг B) (докажите, что такое место обязательно найдется!), и пересадим всю цепочку от B до A' в обратном порядке (рис.37).

Замечание. Предыдущие шесть задач относятся к разделу математики, который называется *теория графов*. *Граф* (рис.38)

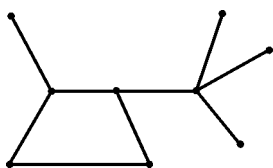


Рис. 38

– это система точек (*вершин графа*), некоторые из которых соединены линиями (они называются *ребрами графа*). Конечно, задачи 260 – 265 нетрудно сформулировать в терминах теории графов, только формулировки получились бы более однообразные и скучные. Но во всяком случае,

при решении этих задач очень полезно рисовать соответствующие графы.

Хотя теория графов, как самостоятельная ветвь математики, возникла сравнительно недавно, в ней уже накопилось много различных понятий и теорем, она быстро развивается и находит разнообразные применения в экономике (теория транспортных сетей, сетевые графики в планировании и пр.), теории электрических цепей и внутри математики.

266. Выберем одного из дружинников. Если бы описанное в задаче распределение дежурств было возможно, то остальные 99 дружинников могли бы разбиться на пары, которые дежурили вместе с выбранным дружинником, но 99 – нечетное число.

267. В отряде должно быть семь человек; каждый должен дежурить по три раза; одно из возможных расписаний в табл.1.

Таблица 1

Дни	1	2	3	4	5	6	7
Дежурят	1	3	3	5	5	7	7
	2	2	4	4	6	6	1
	4	5	6	7	1	2	3

Сначала докажите, что каждый должен дежурить по три раза. Интересно, что любые два расписания отличаются только порядком дней и нумерацией дружинников. Попробуйте это доказать!

268. Из присутствовавших на каждом заседании можно выбрать $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ пар человек. Каждая пара членов комиссии могла встретиться не более чем на одном заседании. Всего заседаний было 40, следовательно, всего пар членов комиссий существует менее $45 \cdot 40 = 1800$. Но из 60 человек можно составить только $\frac{60 \cdot 59}{2} < 1800$ пар.

269. Нет. Трое шахматистов могут набрать максимум 24 очка (3 в партиях между собой и 21 – в партиях с остальными), а остальные семеро сыграли между собой $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ партию, т.е. набрали вместе не менее 21 очка.

270. Пять партий; шесть различных расписаний. Если указать, с кем играет пара – назовем ее командой – $(A; B)$ и $(A; \text{тот, кто не участвует в игре против пары } (A; B))$, то остальные партии составляются однозначно.

Например, если первые две пары команд $(A; B)$ и $(C; D)$, а вторые $(A; E)$ и $(B; C)$, то следующие 3 пары команд с точностью до порядка их перечисления – это $(E; D)$ и $(A; C)$; $(B; D)$ и $(C; E)$; $(A; D)$ и $(B; E)$.

Для подсчета количества расписаний заметим, что начальную пару команд с игроком A можно выбрать из четверки A, B, C, D тремя способами, а вторую пару, которой предстоит играть с командой $(A; E)$, – еще двумя. Остальные пары определяются однозначно. Итого имеется $3 \times 2 = 6$ расписаний.

271. $B - 4$; $\Gamma - 3$; $B - 2,5$; E и A – по 2; $D - 1$. Постарайтесь последовательно ответить на следующие вопросы. Кто был первым, сколько очков он набрал? Какое наименьшее число очков, исходя из условия задачи, могли набрать D, E и A ? Сколько очков набрали Γ и D ?

272. В таблице 2 на пересечении i -й строки и j -го столбца стоят количества очков, полученные в игре команды A_i с командой A_j . Не забывайте пользоваться тем, что все участники набрали разное количество очков. Сначала разберитесь, как сыграли свои партии первые двое.

Таблица 2

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	–	0	2	2	2
A_2	2	–	1	1	1
A_3	0	1	–	1	2
A_4	0	1	1	–	1
A_5	0	1	0	1	–

Замечание. Конечно, количество задач про различные турниры можно было бы значительно уве-

личить, но все они решаются примерно одинаково. Чтобы окончательно расправиться с этими задачами, советуем вам решить такой общий вопрос: каким условиям должна удовлетворять последовательность чисел a_1, a_2, \dots, a_n , чтобы можно было придумать турнир n шахматистов, в результате которого первый набрал a_1 очков, второй — a_2 очков, ..., n -й — a_n очков (здесь предполагается, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, и $2a_k$ — целое число для всех k). Оказывается, необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять последовательность a_1, a_2, \dots, a_n , можно записать так:

$$1) \quad a_n + a_{n-1} \geq 1,$$

$$2) \quad a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \geq 3,$$

.....

$$k) \quad a_n + a_{n-1} + \dots + a_{n-k} \geq \frac{k(k+1)}{2}$$

.....

$$n-2) \quad a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 \geq \frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

$$n-1) \quad a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 = \frac{(n-2)n}{2}.$$

273. Если к данному моменту времени в играх принимали участие $m+1$ команд, то каждая из них сыграла не более m матчей. Таким образом, все эти команды можно разбить на m групп: первая группа — команды, сыгравшие по одной игре, вторая группа — команды, сыгравшие по две игры, и т.д. В некоторых группах может не быть ни одной команды, но поскольку команд всего $m+1$, а групп — m , то обязательно найдется группа, в которую входят по крайней мере две команды.

Замечание. Мы специально так подробно разобрали решение этой задачи, чтобы выделить то простое рассуждение, которое лежит в основе доказательства. В других терминах его можно сформулировать так: «если в m ящиках лежат $m+1$ предметов, то найдется ящик, в котором лежат по крайней мере два предмета». Такое рассуждение используется и в нескольких следующих задачах. С его помощью доказывается целый ряд красивых теорем, и оно имеет специальное название *принцип Дирихле*. Вот один характерный пример применения принципа Дирихле:

Теорема. Если целые числа a и b взаимно просты, то найдется такое натуральное число k , для которого $a^k - 1$ делится на b .

Доказательство. Рассмотрим числа $1, a, a^2, \dots, a^k$ и выпишем их остатки при делении на b . Так как этих чисел $b + 1$, а различных остатков при делении на b существует только b (а именно $0, 1, \dots, b - 1$), то среди этих чисел найдутся два числа, дающие одинаковые остатки при делении на b . Пусть эти числа a^{n_1} и a^{n_2} ($n_1 < n_2$). Тогда их разность $(a^{n_2 - n_1} - 1)a^{n_1}$ делится на b , а поскольку a и b взаимно просты, то и $a^{n_2 - n_1} - 1$ делится на b .

274. Какие-то два из данных чисел дают при делении на n одинаковые остатки. Их разность и делится на n .

275. Если n не делится ни на 2, ни на 5, среди чисел $1, 11, 111, 1111, \dots, \underbrace{111\dots1}_n$, ... найдутся два, дающие при делении на n одинаковые остатки. Их разность имеет вид $\underbrace{11\dots1}_m \underbrace{100\dots0}_l$. Число $\underbrace{111\dots1}_m$ делится на n .

Если $n = 2^k \cdot 5^l \cdot n'$, где n' не делится ни на 2, ни на 5, следует к числу из одних единиц, делящемуся на n' , приписать нужное количество нулей.

276. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ — данные числа. Выделим в a_i степени двойки, т.е. запишем a_i в виде $a_i = 2^{k_i} a'_i$, где $k_i \geq 0$, а a'_i — нечетное число ($i = 1, 2, \dots, n + 1$). Среди чисел a'_i не больше n различных (почему?), но тогда какие-то два из них совпадают. Если $a'_i = a'_j$, то отношение a_j к a_i — степень двойки.

277. а) 67. Запишем все числа от 1 до 100 в таблицу (см. табл. 3), в каждой строке которой отношение любых двух чисел — степень двойки.

Посмотрим, какое наибольшее количество чисел, удовлетворяющих условию, можно взять из каждой строки: из первой — 4, из второй и третьей — по 3 и т.д. Если же взять 68 чисел, то по крайней мере в одной из строк таблицы окажется больше максимально допустимого количества чисел, при этом одно из них окажется вдвое больше другого.

б) $2^{17} = 131072$. Из первой и третьей строк нужные числа выбираются однозначно, из второй — двумя способами, из

Таблица 3

№ строки							
1	<u>1</u>	2	<u>4</u>	8	<u>16</u>	32	64
2	3	6	12	24	48	96	
3	5	10	20	40	80		
4	7	14	28	56			
5	9	18	36	72			
6	11	22	44	88			
7	13	26	52				
8	15	30	60				
...				
12	23	46	92				
13	25	50	100				
14	27	54					
...					
25	49	98					
26	51						
...	...						
50	99						

четвертой, пятой и шестой – тоже двумя способами, от 7-й до 13-й – однозначно, от 14-й до 25-й – двумя способами.

Наконец, из всех оставшихся строк, состоящих из одного числа, – также однозначно. Итого количество возможных выборок равно 2^{17} , поскольку в точности из 17 строк выбор чисел можно осуществить двумя способами.

278. а) Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ – данные числа. Выпишем последовательно две группы чисел $\underbrace{a_2, a_3, \dots, a_{n+1}}_{n \text{ чисел}}$, $\underbrace{a_{n+1} - a_1, a_n - a_1, \dots, a_2 - a_1}_{n \text{ чисел}}$. Всего выписано $2n$ чисел, не превос-

ходящих $2n - 1$. Значит, среди них есть 2 совпадающих числа. Но тогда при некоторых k и l будет $a_k - a_1 = a_l$, т.е. $a_k = a_l + a_1$. (Мы доказали даже несколько более сильное утверждение.)

б) Рассмотрим ряд из $2k - 1$ чисел: $a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1} - a_1, a_k - a_1, a_k - a_1, \dots, a_2 - a_1$.

279. Пусть x_1 – сумма первого числа и его номера, x_2 – сумма второго числа и его номера, и т.д. Рассмотрим остатки от деления чисел x_1, x_2, \dots, x_n на $2n$, и докажем, что какие-то два из них равны. Предположим, что все остатки различны. Тогда их сумма равна

$$0 + 1 + 2 + \dots + (2n - 1) = \frac{2n(2n - 1)}{2}.$$

Очевидно, что сумма чисел x_1, x_2, \dots, x_{2n} минус сумма остатков делится на $2n$. Но $x_1 + \dots + x_{2n} = 2 \cdot \frac{2n(2n+1)}{2}$ и разность

$$2 \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(2n-1)}{2} = 2n \left(n + \frac{3}{2} \right)$$

не делится нацело на $2n$. Противоречие.

280. Из условия задачи видно, что если первый слой в башне задан, то по нему единственным образом строится второй слой, по первому и второму слою однозначно строится третий и т. д. Так можно построить бесконечную башню, удовлетворяющую условиям задачи. Постараемся обрезать эту бесконечную башню так, чтобы условия соседства были выполнены во всех слоях, в том числе и в верхнем.

Рассмотрим всевозможные пары соседних слоев. Так как число таких пар конечно, то в бесконечной башне встретятся две одинаковые пары слоев. Но если два этажа башни соответственно совпадают с двумя другими этажами, то этажи под ними тоже соответственно совпадут. Пусть k -й этаж совпадает с l -м, а $k + 1$ -й с $l + 1$ -м. Тогда совпадают $k - 1$ -й этаж с $l - 1$ -м, $k - 2$ -й с $l - 2$ -м, и т. д. Обозначим $|l - k|$ через n . Тогда, очевидно, $n + 2$ -й этаж будет совпадать со 2 -м, а $n + 1$ -й с 1 -м. Теперь заметим, что если по первым двум этажам по общему правилу соседства построить нулевой этаж, этот нулевой этаж будет совпадать с первым. Таким образом, $n + 1$ -й и n -й этажи оба совпадают с первым этажом. Отсюда следует, что n -й этаж можно считать верхним, — если обрезать на нем башню, то все условия будут выполнены.

281. Пусть p_1, p_2, \dots, p_n — всевозможные простые множители данных чисел. Докажем, что можно выбрать такой отрезок в данном ряду чисел, в котором каждое из p_k встречается множителем четное число раз. Только в этом случае произведение всех чисел в этом отрезке будет полным квадратом.

Выпишем слева от ряда данных чисел столбиком числа p_1, p_2, \dots, p_n и под каждой запятой, отделяющей одно из данных чисел от другого, будем против числа p_k писать 0, если оно встречается до этой запятой четное число раз в качестве множителя данных чисел, и 1, если оно встречается нечетное число раз. Напишем такой столбец также перед первым числом в нашем ряду (он будет состоять из одних нулей), а также в самом конце, после последнего числа. Например, полученная таблица из нулей и единиц может выглядеть так (см. табл. 4).

Таблица 4

	20	14	35	5	28	70	140	7	
$p_1 = 2$	0	0	1	1	1	1	0	0	0
$p_2 = 5$	0	1	1	0	1	1	0	1	1
$p_3 = 7$	0	0	1	0	0	1	0	0	0

Всего существует 2^n различных столбцов из единиц и нулей, поэтому среди $2^n + 1$ столбца в нашей таблице встретятся два одинаковых. Очевидно, что в соответствующем отрезке ряда данных чисел каждое p_k встречается четное число раз.

282. Если разностей, равных единице, не больше трех, разностей, равных 2, не больше 3, и т. д., то

$$(a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 \geq \\ \geq 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \dots + 3 \cdot 6 + 7 + 1 = 71.$$

Принцип Дирихле здесь не нужен.

283. Пусть m — число цифр у наибольшего из чисел. К каждому из наших чисел, у которого $n < m$ цифр, допишем всеми возможными способами еще $m - n$ цифр: тогда вместо одного n -значного числа у нас будет 10^{n-m} m -значных чисел. Нетрудно видеть, что все полученные числа различны, откуда

$$10^{m-1}k_1 + 10^{m-2}k_2 + \dots < 9 \cdot 10^{m-1}.$$

284. Вместе с каждым из k марсианских слов длины n рассмотрим все возможные слова, которые отличаются от него только одной буквой (в одном месте). Полученные k групп по $n + 1$ слову в каждой не пересекаются (т.е. каждое слово может содержаться только в одной группе), поэтому $k(n + 1) < 2^n$.

285. 2^{n-2} . Докажите, что в результате может получиться любая дробь, у которой x_1 состоит в числителе, а x_2 — в знаменателе. Это можно доказать по индукции.

Если в некоторое выражение $(x_1 : \dots : x_n)$ вместо x_n подставить $(x_n : x_{n+1})$ то в окончательном результате x_{n+1} будет стоять в числителе, если x_n стояло в знаменателе, и наоборот. Если в выражение $(x_1 : \dots : (P : x_n))$, где P — некоторая скобка или просто буква x_{n-1} — подставить вместо $(P : x_n)$ скобку $((P : x_n) : x_{n+1})$, то x_{n+1} будет стоять там же, где x_n . Индукцию нужно начинать с $n = 3$.

286. Существует $2^{k+1} - 2$ различные последовательности точек и тире длины не более чем k . Если $k \leq \log_2 n - 1$, то $2^{k+1} - 2 \leq n - 2 < n$.

287. а) Четырьмя взвешиваниями. Доказательство того, что нельзя выделить фальшивую монету меньшим числом взвешиваний, основано на следующем соображении: пусть после какого-то взвешивания осталось m подозрительных монет. Следующее взвешивание может дать один из трех результатов: правая чашка тяжелее, левая чашка тяжелее, равновесие; пусть количество монет, остающихся подозрительными после каждого из этих результатов, равно соответственно m_1, m_2, m_3 . Поскольку $m_1 + m_2 + m_3 \geq m$, одно из чисел m_1, m_2, m_3 не менее $\frac{m}{3}$. Таким образом, за k взвешиваний число подозрительных монет может уменьшиться не более чем в 3^k раз.

Взвешивание монет можно производить так: сравнить две группы по 27 – тогда число подозрительных монет уменьшится до 27 (или до 26), затем сравнить две группы по 9 из числа подозрительных, и т.д.

б) Наименьшее целое число, большее или равное $\log_3 n$.

288. Составляя план взвешиваний, полезно помнить, что k взвешиваниями можно выбрать один вариант не более чем из 2^k вариантов. Один из возможных порядков взвешивания: возьмем две какие-либо пары грузиков: (1, 2) и (3, 4). Пусть $1 < 2$, $3 < 4$ и $1 < 3$ (знак $<$ означает, что левый груз легче). Если теперь выписать 15 вариантов расположения гирь 1, 2, 3, 4, 5, удовлетворяющих этим условиям: например,

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5$$

$$1 < 3 < 2 < 4 < 5$$

$$1 < 2 < 5 < 3 < 4 \text{ и т. д.,}$$

то нетрудно проверить, что разбить эти варианты на две группы из 7 и 8 вариантов можно только сравнив гири 3 и 5. Дальше нужно разбивать варианты на группы аналогичным образом.

289. Например, набор гирь с массами 26, 25, 24, 22, 19 и 11 удовлетворяет условию. Докажем, что из любого набора, состоящего из 7 гирь, можно выбрать две группы гирь, имеющие равные массы. Если набор содержит гири 26, 25, 24 и 23, то все ясно ($26 + 23 = 24 + 25$). Если четверки максимальных гирь в данном наборе нет, то суммарная масса любых четырех (и любого меньшего количества) гирь в этом наборе *меньше* 98. Но всего существует 98 наборов, содержащих одну, две, три и 4 гири ($C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 = 98$). Поэтому массы по крайней мере двух из таких наборов будут совпадать.

Замечание. Решениям следующих двух задач предположим несколько замечаний. Прежде всего, если из 2^n шаров радиоактивен один, то выделить его можно за n испытаний, причем меньшего числа испытаний может не хватить. В самом деле, разбиваем 2^n шаров на 2 группы по 2^{n-1} шаров и определяем, в какой из групп находится активный шар, затем группу из 2^{n-1} шаров разбиваем на две подгруппы по 2^{n-2} шара и т.д. При n -м испытании мы обнаружим искомый шар. При этом за меньшее, чем n , число испытаний активный шар, вообще говоря, не выделяется, ибо, если мы будем обозначать знаком «+» положительный результат (в группе есть активный шар), а знаком «-» обозначать отрицательный результат, то «протокол» цепочки из $m < n$ испытаний образует цепочку из m плюсов и минусов. Всего таких «протоколов» будет 2^m , т.е. всевозможных результатов испытаний оказывается *меньше* общего числа шаров.

Если активных шаров два, а всего шаров m , то имеется $\frac{m(m-1)}{2}$ различных вариантов. Если общее количество испытаний n , и $\frac{m(m-1)}{2} > 2^n$, то выделить пару активных шаров за n испытаний, вообще говоря, нельзя («протоколов» окажется меньше общего числа пар).

Пусть первому испытанию мы подвергаем k шаров, тогда возможны следующие исходы:

1) Если результат «-», то всего есть C_{m-k}^2 вариантов k , если осталось l испытаний, необходимо, чтобы $C_{m-k}^2 \leq 2^l$.

2) Если результат «+», то либо оба активных шара в первой группе, либо один в первой группе, а другой – во второй. Здесь всего $C_m^2 - C_{m-k}^2$ возможных исходов и должно выполняться неравенство $C_m^2 - C_{m-k}^2 \leq 2^l$.

290. Берем для первой проверки 5 шаров. Если результат «+», из оставшихся 14 шаров берем 8 для второй проверки. Если результат снова «+», то один из шаров в первой пятёрке, а другой – в восьмерке. Из пятёрки выделяем активный шар за 3 проверки, а из восьмерки – тоже за 3 проверки. Если же результат второй проверки «-», то из оставшихся еще не проверенных шаров берем 4. Если результат «+», осталось выделить за 3 проверки один шар из пяти и за 2 – один шар из 4. Если же «-», нужно за оставшиеся 5 проверок выделить

активные шары из первой группы в 5 шаров и оставшихся двух шаров. Если же результат самой первой проверки «-», остается выделить 2 активных шара из 14 за 7 проверок. Возьмите на проверку 4 шара и рассуждайте аналогично предыдущим случаям.

291. Если для первой проверки взять два шара и получить при этом результат «-», останется из 9 шаров выделить 2 шара, но это невозможно сделать за пять проверок, так как $2^5 < C_9^2 = 36$. Если для первой проверки взять четыре шара и получится результат «+», то число оставшихся вариантов $C_{11}^2 - C_7^2 = 34 > 2^5$. Итак, для первой проверки нужно взять 3 шара. Если результат проверки «-», то из 8 оставшихся шаров нужно за 5 проверок выделить 2 шара. Как и раньше, получим, что на вторую проверку нужно взять 2 шара. Если опять получится «-», останется из 6 шаров выделить 2 за 4 проверки. Убедитесь, что это невозможно. Таким образом, из 11 шаров выделить 2 шара за 6 проверок можно, только если повезет.

292. Приведем одно из решений. На левую чашку весов положим одну монету из первого мешка, две из второго, и т.д., пять – из пятого. На правую – одну из шестого мешка, две из седьмого, ..., пять из десятого. Проверьте, что по отклонению стрелки весов сразу можно сказать, в каком мешке фальшивые монеты.

293. Два взвешивания. Первое взвешивание: возьмем из 1-го, 2-го, ..., 10-го мешка по одной монете и положим 5 из них на одну чашку весов, а 5 на другую. Если весы остались в равновесии, то фальшивые монеты в 11-м мешке. Если стрелка весов отклонилась, то мы узнали разность весов фальшивой и настоящей монет (на самом деле мы узнали абсолютную величину этой разности). Обозначим ее через x . Кроме того, мы узнали, что в 11-м мешке монеты настоящие.

Сделаем второе взвешивание: на правую чашку весов положим одну монету из первого мешка, две монеты из второго, ..., 10 монет из 10-го мешка, а на левую чашку положим 55 монет из 11 мешка. Обозначим разность весов через y . Тогда число $\left| \frac{y}{x} \right|$ равно номеру мешка с фальшивыми монетами. Доказательство того, что за одно взвешивание определить нужный мешок невозможно, не представляет трудности.

294. 2^{81} . Таблица 9×9 заполняется произвольно, а последний столбец и последняя строка данной таблицы заполняются после этого единственным образом.

295. Восемью способами, отличающимися друг от друга поворотами таблицы. Нетрудно доказать, что 1 должна стоять в углу, 2 – рядом с ней, а другую соседнюю с 1 клетку может занимать только 11. Остальное восстанавливается однозначно.

296. Начнем заполнять таблицу с левого верхнего угла.

Таблица 5

a	ap	ap^2	ap^3
aq	$apqr$	ap^2qr^2	ap^3qr^3
aq^2	apq^2r^2	$ap^2q^2r^4$	$ap^3q^2r^6$
aq^3	apq^3r^3	$ap^2q^3r^6$	$ap^3q^3r^9$

Пусть p и q – знаменатели прогрессий, стоящих в первой стороне и первом столбце таблицы соответственно. Введем еще одно неизвестное r так, как показано в таблице 5. Тогда остальные элементы таблицы восстанавливаются однозначно. Осталось записать и решить систему уравнений $a = 9$, $ap^3qr^3 = 4$, $ap^2q^2r^4 = 16$, $apq^3r^3 = 18$, решая которую, находим, что $p = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$, $q = \frac{3}{2\sqrt[4]{8}}$, $r = \frac{8}{3\sqrt[4]{8}}$.

297. Докажите сначала, что каждая строка таблицы получается из какой-то другой прибавлением ко всем числам одного и того же числа c . (Для этого достаточно рассмотреть кресты, образованные этими двумя строками и произвольными столбцами.) Затем нетрудно показать, что $c = 0$. Поскольку то же самое имеет место и для столбцов, все числа в таблице равны. Остальное ясно.

298. 14. Переставляя строки таблицы, «загоним» одну из отмеченных клеток первого столбца таблицы в левый нижний угол, а вторую отмеченную клетку сделаем соседней с ней по

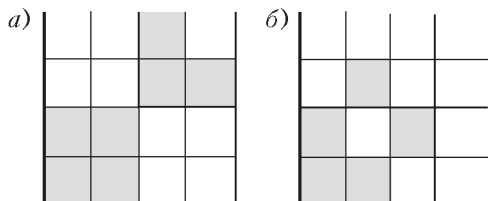


Рис. 39

вертикали. Затем вторую отмеченную клетку нижней строки сделаем соседней с угловой клеткой, так что в левом нижнем углу возникает «уголок» из трех отмеченных клеток. При этом есть две возможности:

1) Четвертая клетка квадрата 2×2 окажется заполненной (рис. 39,а). Тогда к квадрату 2×2 примыкает по вершине квадрат 9×9 , удовлетворяющий условию задачи, с которым мы повторим уже описанные манипуляции – отмеченную клетку – в угол и т.д.

2) Четвертая клетка квадрата 2×2 пуста (рис.39,б). Тогда перестановкой строк подгоняем вторую из отмеченных клеток столбца в положение, показанное на рис.39,б, а перестановкой столбцов – вторую отмеченную клетку второй строки в положение, также показанное на рис.39,б. Далее продолжаем описанную деятельность. В конце концов возникнет квадрат $k \times k$

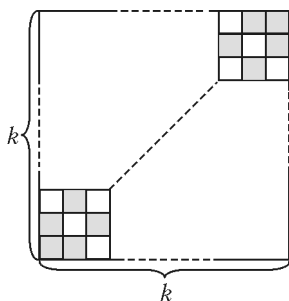


Рис. 40

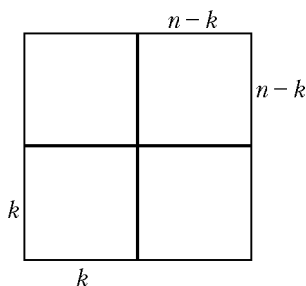


Рис. 41

($k \leq 11$), в котором отмечены угловые клетки диагонали. Остальные клетки диагонали – пустые, а прочие отмеченные клетки с двух сторон примыкают к пустым клеткам диагонали (рис. 40). После возникновения такого квадрата при некотором $k < 11$ рассматриваем примыкающий к нему по диагонали квадрат $(n - k) \times (n - k)$ (рис.41) и над ним проделываем перестановки строк и столбцов. В конце концов из каждого расположения отмеченных клеток приходим к такой картине: вдоль диагонали данного квадрата расположены квадраты со сторонами k_1, k_2, \dots, k_l , устроенные описанным выше образом (рис.42).

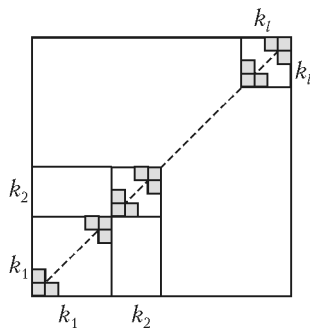


Рис. 42

Итак, каждой расстановке отмеченных клеток отвечает набор натуральных чисел k_1, k_2, \dots, k_l , не меньших двух. Ясно, что если двум расстановкам соответствуют наборы, отличающиеся лишь порядком чисел, то такие расстановки эквивалентны. Если же расстановки неэквивалентны, то соответствующие им наборы чисел будут различны. Итак, число классов попарно эквивалентных расстановок равно числу представлений числа 11 в виде суммы нескольких натуральных чисел, не меньших двух. Таких представлений имеется всего 14: $11 = 9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 7 + 2 + 2 = 6 + 5 = 6 + 3 + 2 = 5 + 4 + 2 = 5 + 3 + 3 = 5 + 2 + 2 + 2 = 4 + 4 + 3 = 4 + 3 + 2 + 2 = 3 + 3 + 3 + 2 = 3 + 2 + 2 + 2 + 2$. Некоторые расположения квадратов показаны на рис.43.

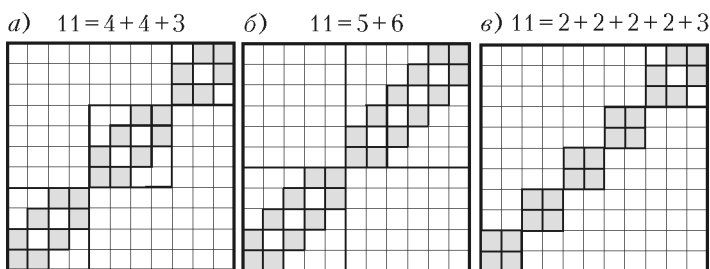


Рис. 43

299. Найдем сумму чисел в каждом столбце и в каждой строке таблицы. Выберем из этих чисел наименьшее и обозначим его через a . Можно, например, считать, что минимальная сумма чисел получается в первой строке.

Значит, в ней найдется по крайней мере $n - a$ нулей. Рассмотрим столбцы, проходящие через какие-нибудь $n - a$ из этих нулей. В каждом из этих столбцов, по условию, сумма чисел не меньше $n - a$ (иначе сумма чисел в этом столбце и в первой строке была бы меньше n). Следовательно, в этих $n - a$ столбцах сумма чисел не меньше, чем $(n - a)^2$. Кроме того, остается еще a столбцов, в каждом из которых сумма не меньше a (не меньше минимума). В этих столбцах сумма не меньше, чем a^2 . Поэтому сумма чисел во всей таблице не меньше

$$(n - a)^2 + a^2 = \frac{n^2}{2} + 2\left(\frac{n}{2} - a\right)^2 \geq \frac{n^2}{2}.$$

300. а) Докажите, что полученная таблица будет симметрична относительно каждой высоты треугольника. Это проще всего сделать по индукции, начав от вершины и переходя от одного

ряда треугольников, расположенных параллельно основанию, к следующему.

б) $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (квадратная скобка означает целую часть числа).

Докажите, что любое симметричное относительно высот расположение единиц и минус единиц в треугольниках, примыкающих к сторонам данного треугольника, можно и притом единственным образом дополнить до требуемой таблицы; нужно заполнять треугольник постепенно, двигаясь к центру (индукция от n к $n + 3$). При нечетном n появляется дополнительное условие: в треугольниках, примыкающих к серединам сторон большого треугольника, должны стоять единицы.

301. Результат игры зависит, очевидно, только от того, какие числа стоят в клетках 1, 2, 3, 4, выделенных на рис.44. Первый проигрывает, если сумма чисел в клетках 1 и 4 меньше, чем в клетках 2 и 3. Укажем, как должен играть первый, чтобы помешать второму выиграть.

Расположим данные числа в порядке возрастания: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_8 \leq a_9$. Первый должен выбирать разную стратегию в зависимости от того, что больше: $a_1 + a_9$ или $a_2 + a_8$.

	1	
2		3
	4	

Рис. 44

Пусть $a_1 + a_9 > a_2 + a_8$. Тогда первый ставит своим первым ходом число a_9 в клетку 1 и своим вторым ходом, независимо от ответа второго, — число a_2 (или число a_1 , если оно не использовано вторым) — в одну из клеток 2 или 3. При этом сумма чисел в клетках 1 и 4 будет не меньше $a_1 + a_9$, а в клетках 2 и 3 — не больше $a_2 + a_8$.

Пусть $a_1 + a_9 < a_2 + a_8$. Тогда первый ставит своим первым ходом число a_1 в клетку 2 и своим вторым ходом — число a_8 (или a_9) в одну из клеток 1 или 4. При этом сумма чисел в клетках 1 и 4 не меньше $a_2 + a_8$, а в клетках 2 и 3 — не больше $a_1 + a_9$. Если $a_1 + a_9 = a_2 + a_8$, то первый может применять любую из этих стратегий; при правильной игре второго они приводят к ничьей.

302. Ясно, что тот, кто назовет одно из чисел 99, 98, 97, ..., ..., 90, проигрывает, поэтому тот, кто назовет число 89, сможет выиграть. Точно так же, «выигрывающими» числами являются 78, 67, 56, ..., 12, 1.

Замечание. Точно так же — начиная «с конца» — можно разобраться в любой подобной игре, где число позиций не

слишком велико, и поэтому можно перебрать их все и разделить на «выигрышные» и «проигрышные» (и «ничейные», если по условиям игры возможна ничья). Следующие две игры относятся как раз к такому типу.

303. Удобно изучать эту игру, заполняя таблицу, каждая клетка которой, стоящая на пересечении i -го столбца и j -й строки, соответствует позиции, когда в первой кучке i , а во второй — j спичек. «+» означает, что начинающий в этой позиции выигрывает, «-» — что начинающий проигрывает. Убедитесь, что проигрышными будут только позиции $(2k, 2k-1)$ и $(2k-1, 2k)$. Поэтому в данной игре начинающему обеспечен выигрыш только при четном n .

304. Противник.

Попробуйте продолжить следующую таблицу (табл. 6):

Таблица 6

Число оставшихся в коробке спичек	1	2	3	4
Количество спичек у того, кто делает ход:				
четно	-	+		...
нечетно	+	+		...

Здесь «+» означает, что тот, кто делает ход, может обеспечить себе выигрыш, «-» — что выиграет другой. Разберитесь, как по имеющимся клеткам узнавать, что стоит в следующей за ними, и тогда вы легко продолжите таблицу как угодно далеко. Для контроля укажем, что период этой таблицы равен 8.

305. 30. Опишем стратегию второго игрока, обеспечивающую ему такую сумму. Разобьем все числа на пары $(1, 2)$, $(3, 4)$, ..., $(19, 20)$. Каждый раз, когда первый ставит какой-нибудь знак перед одним из чисел, кроме чисел последней пары, второй ставит противоположный знак перед числом той же пары. Как только первый ставит какой-нибудь знак перед одним из чисел 19 или 20, второй ставит тот же знак перед другим числом той же пары. В итоге модуль суммы будет не меньше, чем

$$19 + 20 - \underbrace{1 - 1 - \dots - 1}_{9 \text{ раз}} = 30.$$

Докажем, что первый может не позволить второму набрать больше 30. Для этого при каждом своем ходе он должен ставить перед наибольшим из оставшихся чисел знак, противоположный знаку имеющейся к этому моменту суммы (если сумма равна 0, ставится плюс).

Пусть k -й ход — последний, в результате которого сумма меняет знак (включая ходы, перед которыми она равна нулю). За первые $k - 1$ ходов будут заведомо использованы числа 20, 19, 18, ..., $20 - (k - 1)$. Так что максимальная по модулю сумма будет после k -го хода не больше, чем $20 - (k - 1) + 20 - k = 41 \cdot 2k$.

За каждый из оставшихся $10 - k$ ходов сумма уменьшается по крайней мере на 1, так как первый каждый раз вычитает из модуля суммы *наибольшее* из оставшихся чисел m , а второй не может добавить к нему *больше* $m - 1$. В результате сумма будет не больше, чем $41 \cdot 2k - (10 - k) = 31 - k \leq 30$.

306. Пусть карточки выложены в ряд так, как требуется в условии задачи. Занумеруем их слева по порядку. Две карточки, на которых написан нуль, занимают четное и нечетное места, т.е. сумма номеров их мест нечетна. Карточки, на которых написана единица, занимают или обе четные места, или обе — нечетные места, т.е. сумма номеров их мест четна. Наконец, сумма номеров мест, которые занимают карточки с девятками, четна. Таким образом, получается, что сумма номеров мест всех карточек нечетна. На самом деле эта сумма равна $1 + 2 + 3 + \dots + 20 = 210$.

307. а) Обходя окружность, подсчитаем, сколько раз мы меняем знак с $+$ на $-$ (и с $-$ на $+$). Пусть это число d . Докажите, что $p = a + d$, $q = b + d$.

б) Непосредственно следует из пункта а). Можно рассуждать и так: из того, что $x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_m x_1 = 0$, следует, что количество $+1$ в этой сумме равно количеству -1 . Однако, так как $(x_1 x_2)(x_2 x_3) \dots (x_m x_1) = x_1^2 x_2^2 \dots x_m^2 = 1$, количество -1 (а также и количество $+1$) в выписанной сумме четно, так что m равно удвоенному четному числу.

308. 6210001000. Вы, по-видимому, без особого труда нашли это число. Попробуйте найти короткое и изящное доказательство его единственности.

309. Если a^m — самое большое из чисел, лежащих в одном из карманов, то сумма чисел из другого кармана не больше, чем $1 + a + \dots + a^{m-1} < a^m$.

310. У каждого пассажира осталась по крайней мере одна монета сдачи, и по крайней мере n монет опущено в кассу. Нетрудно придумать пример такого обмена, когда четыре пассажира опускают в кассу 20-копеечную монету, причем каждый платит ровно 5 копеек и получает ровно одну монету сдачи

311. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{50}$. В сумме, указанной в условии задачи, освободимся от знаков абсолютной величины.

Получаем:

$$\pm(a_1 - a_2) \pm(a_2 - a_3) \pm \dots \pm(a_{50} - a_1).$$

Если раскрыть круглые скобки, то в полученной алгебраической сумме 50 слагаемых будут стоять со знаком плюс и 50 – со знаком минус. Эта сумма, очевидно, не больше, чем

$$2a_{50} + 2a_{49} + \dots + 2a_{26} - 2a_{25} - \dots - 2a_1.$$

Для того чтобы получить наибольшую возможную сумму, достаточно расположить числа в следующем порядке:

$a_{50}, a_1, a_{49}, a_2, \dots, a_{26}, a_{25}.$

312. Воспользуемся индукцией по числу машин.

Нетрудно доказать, что найдется по крайней мере одна машина, которая может доехать до следующей (по часовой стрелке). Выльем весь бензин из второй машины в первую и вторую машину уберем с дороги. Среди оставшихся $n - 1$ машин, по предположению индукции, найдется такая, которая может проехать всю дорогу, забирая по пути бензин у остальных. Нетрудно проверить, что эта же машина годится и для первоначальной задачи, когда на дороге стоит n машин.

313. Можно доказывать по индукции по n .

Отметим те числа, перед которыми нет больших. Они расположены в порядке возрастания, так что если таких чисел не менее $n + 1$, то все ясно. Отметим далее те числа, за которыми нет больших. Они расположены в порядке убывания. Если всех отмеченных чисел не больше $2n - 1$, то остальных чисел – по крайней мере $(n - 1)^2 + 1$, и по предположению индукции из них можно выбрать возрастающую или убывающую цепочку из $n - 1$ чисел. Нетрудно доказать, что к ней всегда можно добавить одно из отмеченных чисел.

314. Индукция по числу кружков. Выберем наименьшее m , для которого существует m кружков таких, что имеется ровно m ребят, занимающихся в этих кружках. Рассмотрим один из этих m кружков (если таких m вообще не существует, можно взять произвольный кружок). Назовем любого из его участников старостой. Докажите, что если этот кружок разогнать, а старост выгнать из школы, то для оставшихся кружков все условия задачи будут выполнены.

Утверждение задачи 314 представляет собой одну из наиболее важных теорем «комбинаторного анализа» – ее называют «теорема Холла», или «теорема о различных представителях».

315. а) Внутри прямоугольника $m \times n$ расположено $(m-1)(n-1)$ узлов, на его сторонах — $(2m+2n)$ узлов.

$(m-1)(n-1) + \frac{2(m+n)}{2} - 1 = mn$ — площади прямоугольника.

б) Пусть r — число узлов внутри трапеции, j_1 — число узлов на ее наклонной стороне, j_2 — число узлов на остальных сторонах и в вершинах. Из двух одинаковых трапеций можно составить прямоугольник, приложив их наклонными сторонами друг к другу (рис.45). Площадь этого прямо-



Рис. 45

угольника в соответствии с а) равна $2r + j_2 + \frac{2j_1 - 2}{2} - 1$. Пло-

щадь одной трапеции в 2 раза меньше: $r + \frac{j_1 + j_2}{2} - 1$.

в) Проведем вертикальную прямую в стороне от многоугольника (рис.46) и от каждой его вершины проведем горизонтальный отрезок до этой прямой. Площадь многоугольника равна разности между площадью трапеций, наклонные стороны которых не видны с вертикальной прямой, и площадью трапеций, наклонные стороны которых видны с вертикальной прямой. Площадь каждой трапеции определяем согласно б). Остается проверить, что при этом каждый узел внутри многоугольника и на границе считается требуемое число раз.

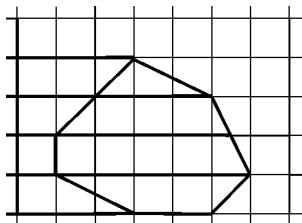


Рис. 46

Доказанная важная формула называется формулой Пика. Она верна и для невыпуклых многоугольников. Попробуйте это доказать, воспользовавшись тем, что произвольный многоугольник можно разрезать на выпуклые многоугольники, проводя разрезы по диагоналям.

316. $m + n - d$, где $d = \text{НОД}(m, n)$.

317. Предположим, что можно обойти доску $4 \times n$ конем так, как указано в задаче. Разрежем доску на отдельные поля и расположим эти $4n$ полей на окружности в том порядке, как их обходил конь; черные и белые поля чередуются. Где будут расположены $2n$ полей, стоявшие в двух крайних рядах доски $4 \times n$? Никакие два из них не стоят рядом, так как с крайних

полей конь всегда ходит на средние. Значит, они стоят через одно. Но тогда все они должны иметь одинаковый цвет.

318. Если x и y — целые неотрицательные числа, причем $x + y = k > 0$, то числа $\frac{(x+y)^2 + 3x+y}{2} = \frac{k^2+k}{2} + x$ при изменении y от k до 0 пробегает отрезок натурального ряда от числа $\frac{k^2+k}{2}$ до числа $\frac{k^2+3k}{2}$. Если же $x+y = k+1$, соответствующий отрезок натурального ряда состоит из всех чисел от $\frac{k^2+3k}{2} + 1$ до $\frac{(k+1)^2 + (k+1)}{2} + k+1$, т.е. является продолжением предыдущего отрезка.

319. 20 поворотов. Если по каждой из 10 улиц одного из параллельных направлений проходит часть маршрута, то на каждой из этих улиц есть по крайней мере два поворота. В противном случае найдется такая улица, которую маршрут пересекает на всех десяти перекрестках, т.е. на каждой из 10 перпендикулярных ей улиц расположена часть маршрута.

320. *mn.* В волейбольной сетке из $m \times n$ ячеек имеется $n(m+1) + m(n+1) = 2mn + m + n$ веревочек, соединяющих соседние узлы, и $(m+1)(n+1)$ узлов. Если мы разрезали несколько веревочек с выполнением условия задачи, из каждого узла A

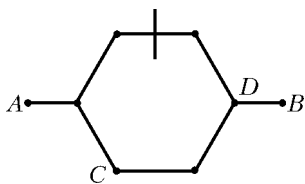


Рис. 47

можно пройти в любой другой узел B по единственному пути. (Если таких путей два, то существуют два узла C и D такие, что из C в D ведут два непересекающиеся пути, см. рис.47. Любую из веревочек одного из них можно перерезать и тогда все равно испорченная сетка будет состоять из одного куска.) Но тогда число перерезанных веревочек будет в точности равно $(m+1)(n+1) - 1 = mn + m + n$. А так как общее количество веревочек равно $2mn + m + n$, можно разрезать не больше mn веревочек.

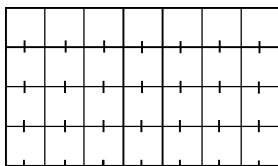


Рис. 48

Пример такого разрезания строится без труда (см. рис.48, на котором в сетке 4×7 показаны штрихами разрезаемые веревочки).

321. Введите систему координат, приняв какие-либо две взаимно перпендикулярные линии клетчатой бу-

маги за оси координат, а ширину клетки за 1. Пусть x_i и y_i – проекции n -звенной ломаной линии на оси координат (с учетом знака). Тогда

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0,$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0,$$

$$x_i^2 + y_i^2 = c,$$

где c – некоторое натуральное число. При делении на 4 число c может давать остатки 0, 1 и 2. Рассмотрим отдельно эти случаи. Если c делится на 4, то оба числа x_i и y_i – четные ($i = 1, 2, \dots, n$) и мы вместо данной ломаной можем рассмотреть ломаную

с проекциями $x'_i = \frac{x_i}{2}$, $y'_i = \frac{y_i}{2}$, так что в этом случае задача сводится к ситуации, когда одно из двух чисел x_i и y_i нечетное (если $c \equiv 1 \pmod{4}$) или оба числа x_i и y_i нечетные (если $c \equiv 2 \pmod{4}$).

В обоих случаях, если n нечетно, либо среди чисел x_1, x_2, \dots, x_n , либо среди чисел y_1, \dots, y_n окажется нечетное количество нечетных чисел, так что соответствующая сумма не будет равна 0.

322. Занумеруем отрезки, по которым полз жук, по порядку. Одно из трех направлений отрезков сети назовем горизонтальным. Докажем, что все номера горизонтальных отрезков имеют одинаковую четность. Пусть a и b – два соседних горизонтальных отрезка на кратчайшем пути, в том смысле, что путь между a и b состоит из отрезков двух других направлений. Ситуация, когда жук пересекает некоторую полосу шестиугольников в двух направлениях (сначала «туда», а потом «обратно»), невозможна, так как в этом случае путь можно было бы сократить

(соединив точки P и Q пунктирной линией, см. рис.49). Отсюда следует, что число промежуточных отрезков между a и b нечетно и что по этим отрезкам жук полз в одном направлении. Поэтому все вообще горизонтальные отрезки пути жука имеют номера одной четности и жук ползет по ним в одном направлении. Это относится и к отрезкам двух других направлений. Поскольку направлений всего три, то либо все отрезки с четными номерами, либо все отрезки с нечетными номерами имеют одинаковое направление. Таких отрезков ровно 50.

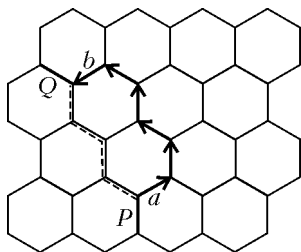


Рис. 49

323. Возьмем любую белую точку A и проведем окружность радиусом 1966 с центром в точке A . Если все точки окружности

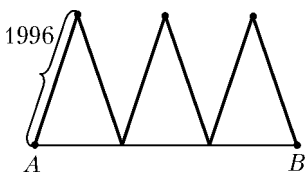


Рис. 50

черные, то все ясно (есть и отрезок с разноцветными концами, и отрезок с одноцветными концами). Также все ясно, если на окружности есть точки разного цвета. Если все точки окружности белые, возьмем какую-нибудь черную точку B и соединим ее с точкой A равнозвенной

ломаной, устроенной так, как показано на рисунке 50. Одно из звеньев ломаной заведомо имеет разноцветные концы.

324. 2. Только 3 прямых, из которых 2 параллельны, а третья их пересекает, имеют 2 точки попарных пересечений.

325. 4 км/ч. Сумма периметров всех кварталов равна удвоенной длине всех улиц плюс длина шоссе.

326. Можно последовательно получать нужные разбиения для любого $n \geq 5$, прикладывая новые прямоугольники «по спирали», как показано на рис.51.

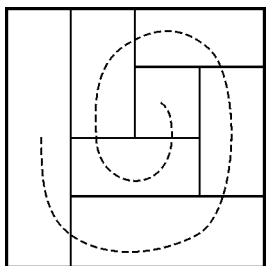


Рис. 51

327. Предположим, что такое расположение 7 точек и 7 прямых существует. Будем называть эти прямые и точки «отмеченными».

Прежде всего докажем, что каждые две отмеченные точки лежат на одной из отмеченных прямых. Действительно, если A — одна из отмеченных точек, то через нее проходит три отмеченные прямые, и остальные шесть отмеченных точек разбиваются на три пары: каждая пара лежит на одной из трех прямых.

Точно так же доказывается, что каждые две отмеченные прямые пересекаются в отмеченной точке: если a — одна из прямых, то на ней лежат три отмеченные точки и через каждую из них проходит пара отмеченных прямых, не считая a . Теперь построим «выпуклую оболочку» семи отмеченных точек, — наименьший выпуклый многоугольник, содержащий эти точки; ясно, что его вершинами будут некоторые из отмеченных точек, и, следовательно, каждая его сторона лежит на одной из отмеченных прямых. Поэтому на каждой стороне должна лежать кроме вершин еще одна отмеченная точка. Отсюда сразу следует, что число сторон не может быть больше трех.

Если же построенный многоугольник — треугольник ABC , и

отмеченные точки, лежащие на его сторонах, — E и F , то прямая EF пересекает прямую AC вне треугольника ABC , хотя она должна, по доказанному выше, пересекать ее в отмеченной точке. Полученное противоречие доказывает, что расположить 7 прямых и 7 точек требуемым образом нельзя.

Замечание. Понятия выпуклой фигуры и выпуклой оболочки часто помогают в решении разных задач про расположение точек и фигур на плоскости. Приведем точные определения.

Фигура (т.е. множество точек на плоскости или в пространстве) называется выпуклой, если вместе с любыми двумя точками A и B она содержит и весь отрезок AB (рис. 52).

Выпуклой оболочкой какого-то множества точек называется наименьшая выпуклая фигура, содержащая это множество точек.

Выпуклую оболочку множества M на плоскости можно получить как общую часть всех полуплоскостей, содержащих множество M .

Наглядно можно представить себе выпуклую оболочку так: возьмем во все точки множества M гвозди и натянем на все эти гвозди замкнутую резинку. Фигура, ограниченная этой резинкой, и будет выпуклой оболочкой множества M .

Если M — конечное множество или многоугольник, то выпуклая оболочка M будет, очевидно, многоугольником.

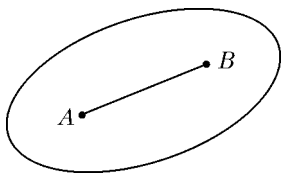


Рис. 52

328. Поскольку в каждой вершине куба сходятся три ребра, к каждой вершине должен был бы примыкать конец проволоки. Но концов всего два, а вершин у куба — восемь.

329. Турист может идти от кафе по произвольному маршруту с единственным условием: придя на перекресток (на площадь), он должен выбирать следующую улицу среди тех, по которым он шел до этого нечетное число раз. Докажем, что хотя бы одна такая улица всегда найдется.

Пусть турист пришел на какую-то площадь, кроме вокзальной. Предположим, что до этого турист выходил на эту площадь — и, следовательно, уходил с нее — k раз. Тогда на эту площадь ведет в общей сложности $2k + 1$ «след» туриста. Поэтому среди улиц, выходящих на площадь, хотя бы по одной турист шел нечетное число раз.

Осталось заметить, что маршрут, удовлетворяющий указанному нами условию, не может проходить два раза по одной и той

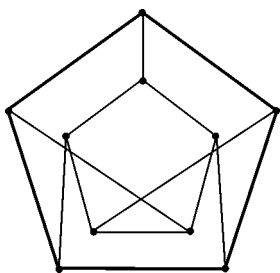


Рис. 53

же улице: после того, как турист прошел по какой-то улице, возвращаясь из кафе на вокзал, эта улица относительно уже к тем, по которым он шел четное число раз, и больше попасть на нее турист не может. Поскольку число улиц конечно, через некоторое время турист придет на вокзал.

330. 10 городов. Из любого города A можно добраться не более чем до трех городов, а из каждого из них не более чем до двух (не считая A). Таким образом, всего городов не более, чем $1 + 3 + 3 \cdot 2 = 10$.

Пример на рис.53 показывает, что нужная система авиалиний в государстве с десятью городами существует.

Замечание. Граф на рис.53 имеет специальное название «граф Петерсена» и часто используется в теории графов в качестве примера.

331. n окружностей — на $n(n-1)+2$ части. Индукция: $n+1$ -я окружность делится предыдущими максимум на $2n$ дуг, и каждая из этих дуг делит имевшуюся до этого часть плоскости на две, т.е. прибавляет одну новую часть плоскости. Чтобы получить пример того случая, когда каждая окружность делится предыдущими на максимально возможное число дуг, достаточно проводить каждую окружность так, чтобы она пересекала часть плоскости, лежащую внутри всех предыдущих, а также пересекала часть плоскости, лежащую вне всех предыдущих.

332. Для призмы при четном n — две, при нечетном n — три. Для пирамиды при четном n — три, при нечетном n — четыре. Нужно построить соответствующие примеры и в каждом случае показать, что меньшим числом букв обойтись нельзя.

333. Докажите, что сумма номеров сторон при такой расстановке должна для каждого треугольника равняться $\frac{3(n+1)}{2}$.

Отсюда следует, что при четном n такая расстановка невозможна. При нечетном: если приписать отрезку, выходящему из общей вершины 1-го и 2-го ребра, номер n и далее нумеровать отрезки через один в порядке убывания, то сумма номеров сторон у всех треугольников будет одна и та же.

334. К каждому многоугольнику, у которого A не вершина, можно ее добавить и получить многоугольник с вершиной A_1 .

335. Концы всех дуг, покрывающих окружность, делят ее на несколько частей. Если какую-то часть окружности покрывают три или больше дуг, то выберем из этих дуг две, которые простираются дальше всего по и против часовой стрелки (это может быть даже одна дуга), а все остальные выбросим. После нескольких таких операций мы добьемся того, что все части окружности будут покрыты не более чем двумя дугами.

336. Введем прямоугольную систему координат xOy так, чтобы ни один из данных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ не лежал на осях

координат. Пусть $\vec{a}_i = (x_i, y_i)$. Тогда $|\vec{a}_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq |x_i| + |y_i|$.

По условию $4 = \left| \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| \right| \leq \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|$. Отсюда следует, что сумма длин проекций векторов на один из лучей, лежащих на координатных осях, не меньше 1. Но тогда длина суммы векторов, лежащих в соответствующих квадратах, будет больше 1.

337. а) Пусть k – количество точек пересечения звеньев. Всего звеньев окажется $2k$. На рис.54, а, б показаны такие ломаные для $n = 6$ и $n = 8$. Разглядывая эти рисунки, можно

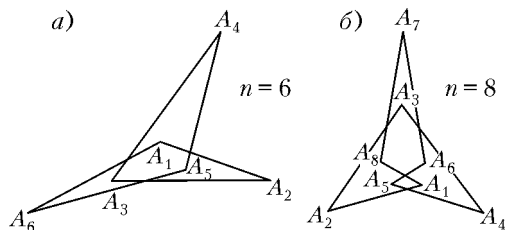


Рис. 54

понять, как построить требуемую ломаную для любого $n = 2k$, $k \geq 5$.

б) Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ – вершины правильного $2n - 1$ угольника. Ломаная $A_1 A_3 A_5 \dots A_{2n-2} A_1$ удовлетворяет условию.

338. Двигаясь по полуокружности длиной $\sqrt{2\pi S}$, мы наверняка выйдем из леса, так как площадь полукруга соответствующего радиуса в точности равна S .

339. Треугольников 3932, разрезов 5893. Пусть получилось n треугольников. Сумма их углов равна $2\pi + 1965 \cdot 2\pi = n\pi$, т.е. $n = 3932$.

340. а) Нет. Рассмотрим точку A , для которой минимальное из расстояний до других точек максимально. Все прочие точки

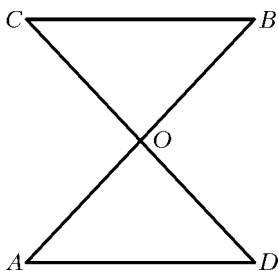


Рис. 55

лежат вне круга радиуса d с центром в точке A . Если бы какая-то из этих точек была соединена с A , то для нее минимальное расстояние до ближайшей к ней точки A оказалось бы больше d , что противоречит определению точки A .

б) Нет. Пусть точка B – ближайшая к точке A , D – ближайшая точка к точке C , а отрезки AB и CD пересекаются (рис.55). Тогда $AD > AB$, $BC > CD$ и $AD + BC > AB + CD$, что невозможно, ибо $AD \leq AO + OD$, $BC \leq CO + OB$ и $AD + BC \leq AB + CD$ (см. также задачу 385).

341. Возьмем две ближайшие друг к другу планеты. Ясно, что астрономы на этих планетах смотрят друг на друга.

Остается еще $n - 2$ планеты и $n - 2$ астронома. Если хотя бы один из них смотрит на уже выбранную планету, то на одну из $n - 2$ планет не хватит астрономов. Если же на эти две планеты никто больше не смотрит, то снова применяем уже проведенное рассуждение. Поскольку n нечетно, в конце концов останется одна планета, на которую никто не смотрит.

342. Рассмотрим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данные точки. Пусть его вершины – это k из данных точек. Остальные $102 - k$ точек лежат внутри этого k -угольника.

Будем соединять точки друг с другом непересекающимися отрезками до тех пор, пока это возможно. В результате k -угольник (сравните с задачей 99) окажется разбит на треугольники так, что всякие два треугольника разбиения либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо общую сторону (такое разбиение называется триангуляцией). Подсчитаем, сколько треугольников получилось. Пусть n – их количество. Тогда, с одной стороны, сумма углов всех треугольников равна $n\pi$, а с другой – равна сумме углов k -угольника, т.е. $\pi(k - 2)$, плюс сумма всех углов с вершинами внутри k -угольника, т.е. $2\pi(102 - k)$. Таким образом, $n\pi = \pi(k - 2) + 2\pi(102 - k)$, откуда $n = 202 - k \geq 100$. Площадь k -угольника меньше 1. Поэтому найдется треугольник с площадью меньше 0,01.

343. Можно. Приведем одно из возможных расположений точек. Разделим квадрат горизонтальным отрезком пополам и поместим на этом отрезке 200 точек, которые разделят его на 201 кусок длины $\frac{1}{201}$. Тогда, очевидно, любой прямоугольник со

сторонами, параллельными сторонам квадрата, не содержащий внутри ни одной из наших точек, должен целиком лежать или в верхней половине квадрата, или в нижней.

Обе эти половины снова разделим горизонтальными отрезками пополам, и разместим на этих отрезках точки настолько часто, чтобы прямоугольник площади $\frac{1}{201}$, не содержащий ни одной из этих точек, должен был целиком помещаться в одном из полученных прямоугольников $1 \times \frac{1}{4}$. Для этого достаточно разместить на каждом из отрезков по 100 точек.

Продолжая таким же образом дальше, мы должны будем для каждого $k = 1; 2; 3; \dots$ построить 2^{k-1} отрезков и на каждом из них расположить $\left\lceil \frac{200}{2^{k-1}} \right\rceil$ точек, делящих этот отрезок на $\left\lceil \frac{200}{2^{k-1}} \right\rceil + 1$ равных частей. При этом каждый раз ширина прямоугольников, на которые проведенные горизонтальные отрезки делят квадрат, уменьшается вдвое. После того как мы построим точки, соответствующие $k = 7$, эта ширина будет равна $\frac{1}{256}$. В такой прямоугольник уже не может поместиться прямоугольник площади $\frac{1}{200}$, так что больше не нужно строить никаких точек.

Нам понадобилось всего $200 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 50 + 8 \cdot 25 + 16 \cdot 12 + 32 \cdot 6 + 64 \cdot 3 + 128 \cdot 1 = 1504$ точки. Остальные $1965 - 1504$ точки можно расположить как угодно.

344. Разделим квадрат на 25 квадратиков со стороной $\frac{1}{5}$. В одном из них наверняка найдутся 3 точки из данных. Радиус окружности, описанной около квадрата со стороной $\frac{1}{5}$, равен $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$.

345. Пусть ABC – треугольник наибольшей площади с вершинами в данных точках. Все данные точки содержатся в треугольнике $A'B'C'$, в котором стороны треугольника ABC являются средними линиями (см. рис.56). В самом деле, если

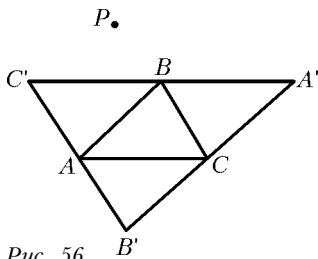


Рис. 56

какая-то точка P окажется вне треугольника $A'B'C'$, расстояние от нее до одной из сторон треугольника ABC будет больше некоторой высоты треугольника ABC . Площадь треугольника PAC окажется больше площади треугольника ABC . Площадь же треугольника $A'B'C'$ не больше 4.

346. Опишем вокруг каждой из данных точек круг радиуса $1/2$. Сумма диаметров этих кругов равна 100. Если какие-то два круга пересекаются, заменим их одним кругом, а именно, кругом наименьшего диаметра, содержащего эти два. Сумма диаметров при этом не станет больше, а число кругов уменьшится. Продолжая эту процедуру, мы получим систему попарно не пересекающихся кругов, содержащих все данные точки, причем сумма диаметров этих кругов не больше 100. Отметим, что расстояние от каждой точки до границы круга не меньше $1/2$. Пусть r – наименьшее расстояние между кругами. Если $r > 1$, то все доказано. При $r < 1$ заменим каждый из кругов concentрическим с ним кругом, радиус которого на $\frac{1}{2} - \frac{r}{3}$ меньше. Полученная система кругов удовлетворяет условию.

347. Пусть A и B – наиболее удаленные из данных n точек. Два круга радиуса 1 с центрами в точках A и B содержат все данные точки.

348. Нет. Пусть на плоскости даны N точек, D – наибольшее, а d – наименьшее из расстояний между ними. Возьмем любую из

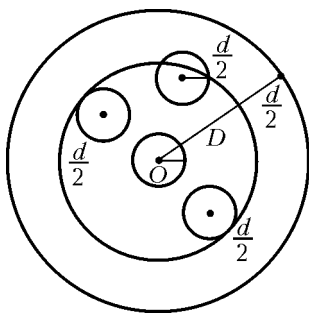


Рис. 57

данных точек и построим круг с центром в этой точке (рис.57). Все остальные точки окажутся внутри или на границе этого круга. Теперь рассмотрим круги радиусом $\frac{d}{2}$ с центрами во всех данных точках. Эти круги не перекрываются и их суммарная площадь равна $\frac{\pi Nd^2}{4}$.

С другой стороны, все эти круги целиком содержатся в круге ради-

усом $D + \frac{d}{2}$, поэтому их суммарная площадь меньше площади большого круга, т.е. $\frac{\pi Nd^2}{4} < \pi \left(D + \frac{d}{2} \right)^2$. Следовательно, $\frac{d\sqrt{N}}{2} < D + \frac{d}{2}$, откуда $\frac{D}{d} > \frac{\sqrt{N} - 1}{2}$. Однако при

$N = 225$, $D \leq 21$ и $d \geq 3$ полученное неравенство не выполняется.

349. Суммарная площадь всех монет меньше площади стола. Если радиус каждой монеты увеличить вдвое, то монеты покроют все точки стола, отстоящие более чем на r от края, следовательно, суммарная площадь всех монет станет больше площади круга радиуса $R - r$. Поэтому

$$\frac{\pi(R-r)^2}{4} < \pi nr^2 \leq \pi R^2, \quad \text{т.е.} \quad \frac{R-r}{2r} < \sqrt{n} \leq \frac{R}{r}.$$

350. 49500. Чтобы решить эту задачу, достаточно заметить две вещи: 1) можно сказать, что шарики не сталкиваются, а проскакивают друг сквозь друга без изменения скорости; 2) каждая пара шариков за один «цикл» (за 0.2 с) столкнется два раза.

351. Движение джентльменов периодически с периодом 12 мин: через каждые 12 мин любой из них находится в первоначальной точке на аллее и движется по ней в ту же сторону.

Наматываем ось времени на окружность длиной 12 мин, а эту окружность будем считать трехслойной. Первый слой состоит из двух дуг длиной в 6 мин, второй из 4 дуг по 3 мин каждая, третий слой — 6 дуг по 2 мин каждая. Дуги каждого слоя покрасим в два цвета, черный и белый (цвет определяется направлением движения данного джентльмена по аллее так, чтобы эти цвета в одном слое чередовались). Рассмотрим пересечение одноцветных дуг первого и второго слоев, получим по крайней мере две общие черные дуги α и β по 2 мин каждая и две белые дуги γ и δ , также по 2 мин. 6 дуг третьего слоя делятся на 3 черные и 3 центрально симметричные им белые дуги. Поэтому, если пересечение дуг α и β с тремя черными дугами составляет меньше 1 мин, то пересечение дуг γ и δ с белыми дугами составляет дугу, большую 1 мин. Что и требовалось.

352. Самое красивое решение этой задачи основано на выходе в трехмерное пространство. Направим ось времени вертикально вверх (выберем на ней начало отсчета и единицу измерения) и построим график движения для каждого пешехода: для каждой точки M дороги отметим на вертикальной прямой, проходящей через M , точку, показывающую, в какой момент времени пешеход проходит через точку M . Поскольку движение равномерное, графики будут прямыми. Моменту встречи пешеходов соответствует точка пересечения их графиков движения. Докажите, исходя из условий задачи, что все четыре графика лежат в одной плоскости. Отсюда будет следовать утверждение задачи.

353. Пусть A_1 – первый наблюдатель, A_2 – последний из всех наблюдателей, начавший следить за улиткой до того, как закончил наблюдать A_1 , A_3 – последний из наблюдателей, приступивший к наблюдению до того, как за ней кончил следить A_2 , и т.д. Нечетные промежутки, когда наблюдали A_1, A_3, A_5, \dots , не пересекаются, также как четные промежутки, когда наблюдают A_2, A_4, A_6 . Но любой из этих промежутков равен 1 мин, а весь интервал наблюдения составляет 6 мин. Поэтому как четных, так и нечетных промежутков не больше 10, и, значит, улитка проползла не более 10 м. Пример движения улитки, при котором она проползет ровно 10 м, постройте самостоятельно (улитка может и останавливаться!).

354. Через 18π с ≈ 57 с. Пусть B – точка, в которой находится самолет в момент запуска. Проверим, что ракета летит по окружности радиуса 5 км, для которой прямая AB является касательной. Пусть P – произвольная точка окружности, по которой летит самолет, M – точка пересечения отрезка PA с окружностью радиуса 5 км – предполагаемой траекторией ракеты. Тогда угол PAB измеряется половиной дуги MA , т.е. дуга PB вдвое меньше (в смысле количества градусов) дуги MA . Но радиус дуги PB вдвое больше радиуса дуги MA , так что по длине эти дуги равны. Поскольку скорости самолета и ракеты равны, то если ракета будет лететь по окружности радиуса 5 км, то она все время будет находиться на прямой, соединяющей самолет с точкой A , что мы и хотели проверить. Ракета догонит самолет, когда она пролетит половину окружности радиуса 5 км, т.е. через $\frac{5\pi}{1000} = \frac{\pi}{200}$ ч.

355. Если провести прямые, соединяющие гангстера с полицейскими в начальный момент, то все эти прямые пройдут через «двери» некоторых домиков (точки $D_0, D_1, D_{-1}, E_0, E_1, E_2, E_{-1}, E_{-2}$ и т.д., см. рис.58).

Пусть теперь полицейские поехали со скоростью v . Если гангстер начнет двигаться в обратном направлении со скоростью

$u = \frac{v}{2}$, то прямая, соединяющая его с полицейским P_0 , постоянно проходит через точку E_0 , прямая, соединяющая его с полицейским P_1 , постоянно проходит через точку E_1 и вообще каждая такая прямая как

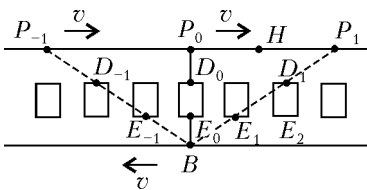


Рис. 58

бы вращается вокруг двери соответствующего домика. Значит, полицейские никогда не увидят гангстера. По тем же причинам гангстера не увидят, если он поедет со скоростью $u = 2v$ (помогают верхние двери домиков: точки D_0, D_1, D_2, D_{-1} и т. д. Интересно, что для того, чтобы гангстер мог скрыться, не нужно домиков – хватило бы и дверей!) Можно показать, что других решений у задачи нет. Ясно, что в ту же сторону, что и полицейские, гангстер двигаться не может. Действительно, полицейский P_0 при своем движении по отрезку P_0H просмотрит весь отрезок, и наверняка увидит гангстера, если тот будет двигаться направо.

Сложнее показать, что если гангстер будет двигаться навстречу полицейским со скоростью u , где $u \neq \frac{v}{2}$ и $u \neq 2v$, то они его увидят. Поскольку скорости полицейских и гангстера постоянны, можно считать, что прямые, соединяющие гангстера с полицейскими, вращаются каждая около некоторой точки. Эти точки лежат на некоторой прямой, параллельной дорогам, на расстоянии $9a \frac{u}{u+v}$ друг от друга. Постарайтесь доказать, что если число $\alpha = \frac{3u}{u+v}$ не целое, то одна из этих точек обязательно попадет в просвет между домами. (Это эквивалентно тому, что найдется целое n , для которого $\frac{1}{6} < n\alpha - [n\alpha] < \frac{5}{6}$, где $[n\alpha]$ – целая часть числа $n\alpha$.) Соответствующий полицейский увидит гангстера.

Итак, гангстер должен двигаться навстречу полицейским со скоростью $\frac{v}{2}$ или со скоростью $2v$.

356. Обозначим длину луча прожектора через a . Назовем круг радиуса a , просматриваемый прожектором, кругом обнаружения. Предположим, что катер может пробраться к острову незамеченным, и отметим тот момент, когда он входит в круг обнаружения. (Ясно, что катеру выгоднее всего войти в этот круг в такой точке A , через которую только что прошел луч прожектора.) За время $\frac{5\pi a}{2v}$ после этого момента катер не успеет дойти до острова: он будет где-то внутри круга радиуса $\frac{5\pi av}{2v \cdot 8} = \frac{5\pi a}{16} < a$, заштрихованного на рис.59. За это время луч прожектора повернется на угол $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ радиан; таким образом, он

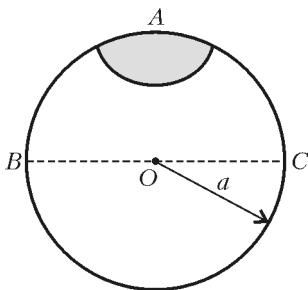


Рис. 59

просмотрит весь полукруг $OBAC$, т.е. просмотрит всю зону, где мог находиться в это время катер.

357. Покажите, что корабль найдёт жителя планеты, если он будет действовать следующим образом. Выберем на планете две диаметрально противоположные точки полюса и начертим на поверхности планеты спираль, которая начинается в одном из полюсов – «северном», заканчивается в другом и пересекает каждый меридиан в точках, отстоящих друг от друга на ε – малое положительное число. (Все расстояния на поверхности планеты измеряются по дугам больших кругов и выражаются в радианах, т.е. радиус планеты принят за единицу.)

Предлагается следующий план поиска: корабль летает на постоянном расстоянии $R = \sqrt{2}$ от центра планеты над проведенной спиралью, начиная с северного полюса, с максимальной скоростью.

358. Сможет. Пусть v – скорость, с которой плавает ученик. Тогда $4v$ – скорость бега учителя. Выбрав окружность достаточно малого радиуса, ученик может оказаться на прямой, проходящей через точку T , изображающую учителя, и через центр бассейна (рис.60). Если d – расстояние от ученика до края бассейна, то, двигаясь напрямую по радиусу, ученик доплывет

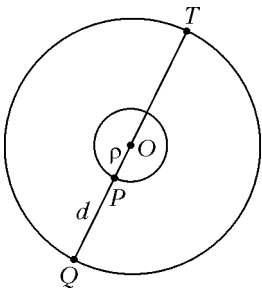


Рис. 60

до края бассейна за время $\frac{d}{v}$, а учитель добежит до точки Q за время $\frac{\pi R}{4v}$, где R – радиус бассейна. Для того чтобы ученик мог сбежать, нужно, чтобы было $\frac{d}{v} < \frac{\pi R}{4v}$, т.е. $d < \frac{\pi}{4} R$. Если, например, ученик будет сначала плыть по окружности

радиуса $\rho = R - \frac{0,1}{4} R = 0,9 \frac{R}{4}$, его

угловая скорость будет больше, чем у учителя, и он сможет занять позицию, показанную на рисунке, а затем, проплыв расстояние $d = \frac{3,1}{4}$, достичь края бассейна до того, как туда прибежит учитель.

359. Назовем длиной пути число отрезков, из которых он состоит. Пусть n – длина кратчайшего пути от перекрестка A до перекрестка B . Докажем утверждения задачи индукцией по n . При $n = 1$ кроме кратчайшего пути AB существует путь, идущий из A в перекресток $C \neq A$, удаленный от B на 1 и не проходящий через B . Пусть $n > 1$, D – ближайший к A перекресток на кратчайшем пути от A к B . По предположению индукции, существуют 2 непересекающихся пути p и q из D в B . Будем идти из A по пути l , не проходящему через D . Если этот путь не пересекается с путями p и q , то все доказано. Если же он впервые пересекает, скажем, путь p , то дальше следует идти по p прямо в B . Полученный путь не пересекается с q .

360. При проделываемых операциях периметр многоугольника не меняется, а площадь каждый раз увеличивается на величину не меньшую, чем самая маленькая площадь, которую может иметь треугольник, две стороны которого равны сторонам данного многоугольника, а угол между ними равен одному из углов между прямыми, на которых лежат стороны и диагонали многоугольника.

Глава 4. Геометрические задачи

361. Проведите окружность с центром вершине данного угла (рис.61) и затем последовательно отложите против часовой стрелки равные дуги $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{18}A_{19}$. Поскольку $19 \cdot 19 = 361$, $\angle A_0AA_{19} = 1^\circ$.

362. Достаточно построить угол $\frac{\pi}{21}$. Поскольку $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{21}$, построим угол $\frac{\pi}{3}$ и удвоим данный угол. Разность построенных углов и даст угол, равный $\frac{\pi}{21}$.

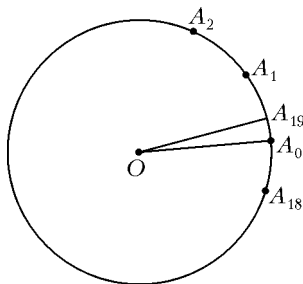


Рис. 61

Замечание. Сходным способом можно разделить на 3 равные части любой угол $\frac{\pi}{2n+1}$, n – натуральное, где $2n+1$ не делится на 3. Задача же о делении на 3 равные части угла $\frac{\pi}{3}$ циркулем и линейкой неразрешима.

363. Пусть A_1 и B_1 – данные точки (рис.62). Эти точки

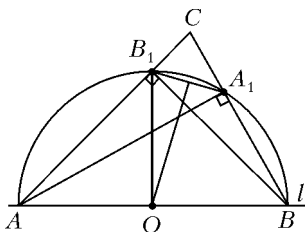
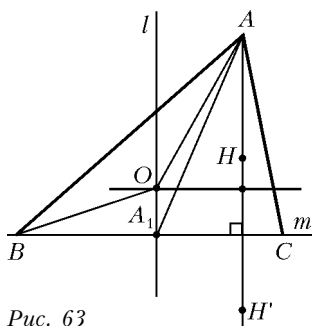


Рис. 62

лежат на окружности, построенной на основании треугольника как на диаметре. Центр этой окружности (а вместе с ним и основание AB треугольника) находится как точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку A_1B_1 и данной прямой l . Осталось провести прямые AB_1 и BA_1 и найти их точку пересечения.

364. Пусть даны точки A (вершина), H – ортоцентр, A_1 – середина противоположной стороны (см. рис.63). Высота треугольника, опущенная из вершины A , лежит на прямой AH , центр O описанной около него окружности



Puc. 63

364. Пусть даны точки A (вершина) и O (середина противоположной стороны) треугольника, опущенная из вершины A на прямую l , проходящей через точку A_1 и параллельной прямой AN . Сторона BC лежит на прямой m , перпендикулярной l и проведенной через точку A_1 .

Заметим еще, что точка H' , симметричная ортоцентру H (треугольника ABC) относительно прямой BC , лежит на описанной около этого треугольника окружности. (Докажите это важное и само по себе утверждение.)

Из всего сказанного следует, что построение треугольника можно осуществить так: 1) строим прямые AH , l и m ; 2) находим центр O описанной окружности как точку пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AH_1 и прямой l ; 3) строим окружность радиусом AO с центром в точке O . Она пересекает прямую m в вершинах B и C треугольника ABC .

365. По указанным данным легко находится вершина треугольника, лежащая вне данной прямой, и середина основания треугольника, после чего задача сводится к задаче 4. Выясните, сколько решений имеет данная задача.

366. Заметим, что если дополнить наш треугольник ABC (медиана AO известна) до параллелограмма $ABCD$, то в треугольнике ABD высоты из A и D равны данным (из B и C), а $AD = 2AO$. Осталось построить треугольник ABD по основанию и высотам из вершин A и D .

367. Докажите сначала, что высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

Если даны основания высот B_1, C_1 и прямая l , на которой лежит высота AA_1 , то для построения треугольника ABC нужно построить точку A_1 как точку пересечения прямой $B_1C_1^*$, где C_1^* – точка, симметричная точке C_1 относительно прямой l , с прямой l (рис.64). Вершины B и C находятся как точки пересечения биссектрис углов

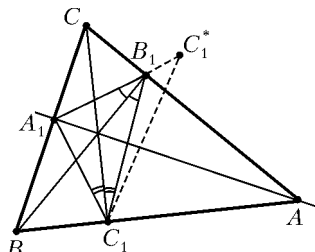


Рис. 64

$A_1B_1C_1$ и $A_1C_1B_1$ с перпендикуляром к l в точке A_1 , а точка A – это точка пересечения прямой BC_1 с прямой l .

368. Учтите, что медиана, проведенная из прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы, и постройте точку пересечения медиан.

369. По отрезку OK восстанавливается прямая, на которой лежит нижнее основание. Далее легко находится прямая, на которой лежит верхнее основание. Точка X пересечения боковых сторон лежит на прямой, проходящей через точку O и середину отрезка EF ; кроме того, отношение ее расстояний до оснований трапеции такое же, как и у точки O (докажите это утверждение, а затем завершите построение).

370. Если $S_{AQX} = \frac{1}{2} S_{PQR}$ (рис.65), то $QX \cdot AQ = \frac{1}{2} PQ \cdot QR$, т.е. $\frac{QX}{QR} = \frac{PQ}{2AQ}$.

371. а) Постройте точку A_1 –

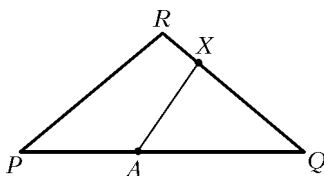


Рис. 65

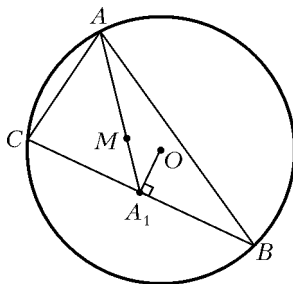


Рис. 66

основание медианы, проведенной из вершины A (рис.66). Перпендикуляр к OA_1 (O – центр окружности) пересекает окружность в остальных вершинах треугольника ABC .

б) Докажите, что если биссектриса угла A пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке A' (рис.67), то $A'C = AM$ (M – точка пересечения биссектрис треугольника ABC). После этого задача легко решается.

Теперь мы можем построить угол α , а затем и четырехугольник. Для построения угла возьмем произвольный отрезок l , построим

отрезки $u = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{l}$ (для определенности будем счи-

тать, что $a^2 + d^2 \geq b^2 + c^2$) и $v = \frac{2(ad + bc)}{l}$. Угол α будет при

этом углом прямоугольного треугольника с катетом u и гипотенузой v . Дальнейшее ясно.

374. Если четырехугольник $ABCD$ – искомый (рис.71), то в четырехугольнике $AOCD$, где O – центр вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности, угол AOC равен $90^\circ + \angle B$. После этого замечания построение точки O не представляет труда – это точка пересечения биссектрисы BK угла B и дуги AOC , вмещающей известный угол, – геометрического места всех вершин углов, равных $\angle AOC$.

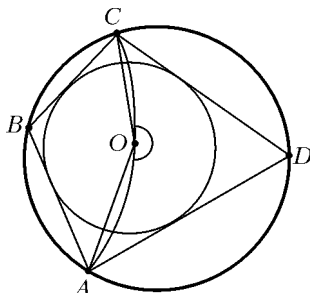


Рис. 71

375. Проведите окружность с диаметром PO . Точки ее пересечения с данной окружностью – вершины прямых углов искомых треугольников.

376. Постройте окружность, центрально-симметричную одной из данных относительно данной точки. Две вершины искомого параллелограмма лежат в точках пересечения этой окружности и второй данной окружности.

377. В треугольнике AXY легко находится длина стороны XY и угол между стороной XY и биссектрисой угла A , после чего треугольник AXY можно построить, так как известен радиус описанной вокруг него окружности.

378. Возьмем отрезок с концами на данных прямых, равный AB , и построим равный и параллельный ему отрезок AD . Тогда одна из точек E и P лежит на прямой BD . Выясните, сколько решений имеет задача.

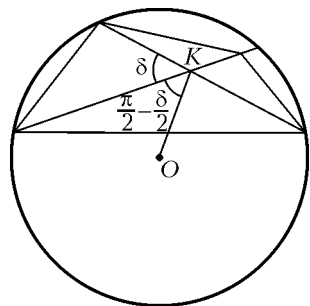


Рис. 72

379. Постройте угол δ между диагоналями трапеции (рис.72), а далее воспользуйтесь тем, что угол между диагональю трапеции и диаметром, проходящим через точку

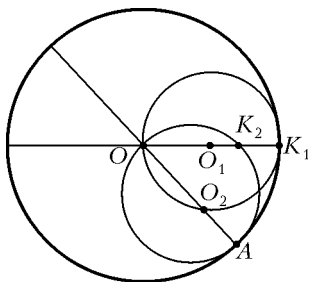


Рис. 73

пересечения диагоналей, равен $\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$.

380. Траектория движения каждой точки подвижной окружности – диаметр большой окружности. Пусть точка K малой окружности переехала из положения K_1 в положение K_2 (рис.73); при этом O_1 и O_2 – положения центра малой окружности, O – центр большой, A – точка касания во второй момент. Мы используем далее лишь то, что вписанный в окружность угол измеряется половиной дуги, на которую опирается, а центральный – целой дугой.

Так как радиус подвижной окружности в 2 раза меньше, $\angle K_2 O_2 A = 2 \angle K_1 O_1 A$ – ведь дуги $K_1 A$ и $K_2 A$ равны – проскальзывания нет. С другой стороны, точка O лежит на подвижной

окружности, поэтому $\angle K_2 O A = \frac{1}{2} \angle K_2 O_2 A = \angle K_1 O A$, значит, точки K_2 , K_1 и O лежат на одной прямой.

381. Введем декартову систему координат, как показано на рис.74. Пусть точка $P(x, y)$ удовлетворяет условию задачи. Пользуясь симметрией квадрата, рассмотрим точки, для которых $y \geq x \geq 0$. Расстояния от точки P до сторон квадрата равны $|x - 1|$, $|y - 1|$, $x + 1$ и $y + 1$. Рассмотрите случаи:

- 1) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$;
- 2) $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 1$;
- 3) $x \geq 1$, $y \geq 1$

и получите ответ.

382. Это точки, выделенные на рис.75.

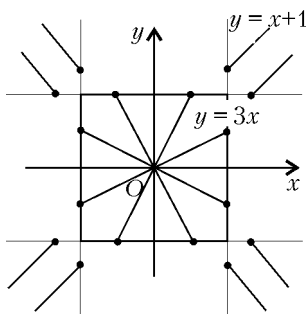


Рис. 74

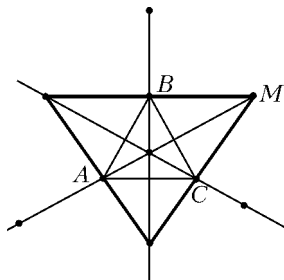


Рис. 75

383. Два отрезка прямых, параллельных сторонам квадрата и проходящих через точку A , а также два равных отрезка, параллельных данной диагонали квадрата, один из которых проходит через точку A (концы всех отрезков лежат на сторонах квадрата).

384. Окружность диаметра $AO/2$, касающаяся внутренним образом данной в точке A .

Пусть $AH = h$, KL – диаметр окружности, M – точка пересечения KP и AH (рис.76). Так как $AH = HA'$, $AM \cdot MA' = x(2h - x) = KM \cdot MP$. Кроме того, аналогично, $HM \cdot MQ = y(2h - y) = KM \cdot MP$. Итак, $x(2h - x) = y(2h - y)$. Отсюда следует, что $x = y$. Таким образом, искомое геометрическое место получается из множества всех точек H гомотетией с коэффициентом $1/2$ и центром H . Точки H в свою очередь лежат на окружности с диаметром AO .

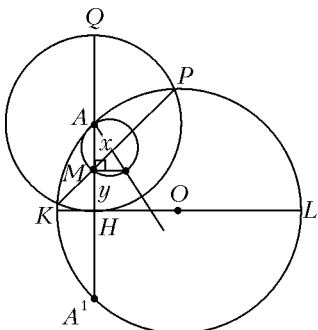


Рис. 76

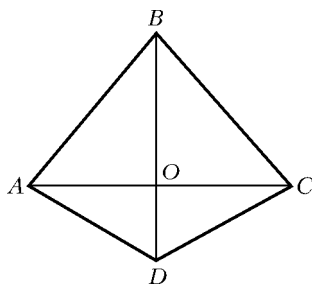


Рис. 77

385. а) $AB < AO + BO$, $CD < OC + OD$ (рис.77). Осталось сложить эти неравенства.

б) Сложив неравенство пункта а) с данным, получим требуемое.

386. Могут. Рассмотрите равнобедренный треугольник с очень большим основанием и очень маленькой высотой.

387. Угол A – заведомо острый. Если $\angle C \geq 90^\circ$, утверждение очевидно. Если угол C острый (рис.78), точки M и C лежат по разные стороны от основания H высоты BH . Поэтому $MK > KC$, но тогда $ME > EC$.

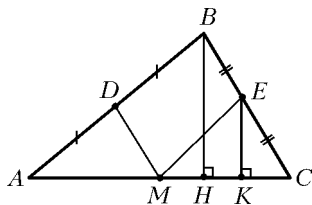


Рис. 78

388. Искомая точка M – основание высоты BM треугольника ABC .

389. Пусть α, β, γ – углы треугольника, причем $\beta > \alpha$. Тогда $180^\circ = \alpha + \beta + \gamma < 2\beta + \gamma$, откуда $\beta + \frac{\gamma}{2} > 90^\circ$. Но это и требовалось.

390. Ось симметрии четырехугольника – либо диагональ, либо средняя линия.

391. Постройте окружность на диагонали, проведенной из острого угла, как на диаметре.

392. Если бы была точка, не покрываемая этими кругами, то каждая сторона была бы видна из этой точки под углом меньшим 90° .

393. Можно считать, что три вершины квадрата лежат на сторонах треугольника (рис.79,а, б). Докажите, что площадь прямоугольника, расположенного так, как показано на рис.79,б, не превосходит половины площади треугольника.

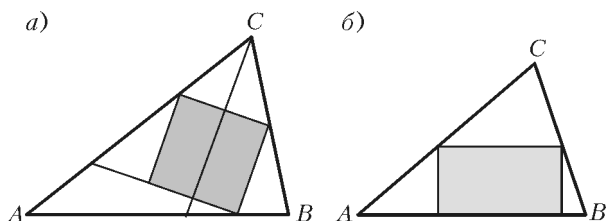


Рис. 79

394. Вначале покажите, что площадь четырехугольника не уменьшается, если, не меняя угла между отрезками длины 1, передвинуть их так, чтобы их общий конец лежал на биссектрисе данного угла. Затем покажите, что каждый из этих отрезков выгодно расположить так, чтобы он отсекал от половины данного угла равнобедренный треугольник.

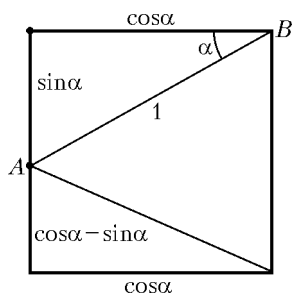


Рис. 80

395. Докажите, что $AM \perp OA$.

396. Докажите, что у любого треугольника площади 1 хотя бы одна из высот не больше высоты равностороннего треугольника такой же площади.

397. Точки A и B – концы диагонали квадрата. Указание. Можно считать, что B – вершина квадрата $AB =$

= 1. Пусть A расположена так, как показано на рисунке (рис.80). Тогда сумма расстояний от A до вершин равна $S = 1 + \cos \alpha + \sqrt{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}$. Очевидно, что $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ и тогда $S \geq 2 \cos \alpha + 1 \geq 1 + \sqrt{2}$, причем при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ значение $1 + \sqrt{2}$ достигается. В случаях, когда AB – сторона квадрата или A – вершина, сумма расстояний от A до вершин больше, чем $1 + \sqrt{2}$.

398. M – середина гипотенузы.

399. Это треугольник, образованный основаниями высот треугольника ABC .

400. Это точка, из которой стороны треугольника видны под углами 120° , если наибольший из углов меньше 120° , и вершина тупого угла, если этот угол не меньше 120° .

401. Если $AB' = AC'$. В этом случае точки B' и C' являются точками касания вневписанной окружности с продолжениями сторон AB и AC (рис.81). Для доказательства этого достаточно заметить следующее: если x такая точка на стороне BC , что $BX = BB'$, а $CX = CC'$, то $\angle B'XC' = \frac{\pi + \alpha}{2}$. Если R – радиус окружности, описанной около тре-

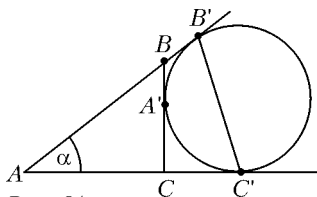


Рис. 81

угольника $B'XC'$, то $B'C' = 2R \sin \frac{\pi + \alpha}{2} = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$ и $B'C'$ будет минимальна при минимальном R . Однако из всех окружностей, пересекающих продолжения сторон AB и AC сторону BC , наименьший радиус имеет вневписанная окружность треугольника ABC .

402. а) Луч, проходящий через центр окружностей.

б) Луч, перпендикулярный радиусу, проходящему через данную точку (см. также задачу 395).

403. Точка пересечения диагоналей.

404. Это прямая, отрезок которой, отсекаемый на ней сторонами угла, делится данной точкой пополам.

405. Одна из диагоналей ромба совпадает с диагональю прямоугольника.

406. Площадь одного из треугольников ABX , BXC , CZD , DZE , EYF и FAY (рис.82) не больше $1/6$ площади шестиугольника. Пусть, например, это треугольник AXB , но тогда одна из

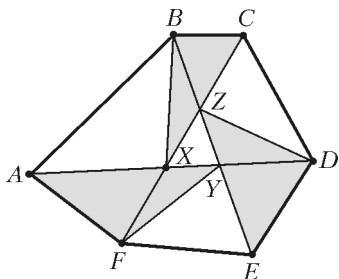


Рис. 82

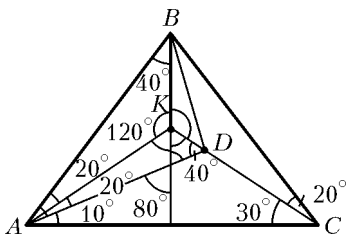


Рис. 83

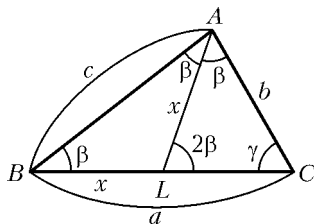


Рис. 84

площадей треугольников ABC или ABF не больше площади AXB .

407. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

408. 70° . *Указание.* Пусть K – точка пересечения CO и биссектрисы угла BAO (рис.83). Докажите равенство треугольников AKB и AKO .

409. $60^\circ, 120^\circ$. *Указание.* Докажите, что расстояние от вершины C до ортоцентра равно $2R|\cos C|$, где R – радиус описанной окружности.

410. $18^\circ, 18^\circ, 144^\circ$.

411. 45° или 135° . См. указание к задаче 409.

412. 1. Пусть A – биссектриса угла A (рис.84). Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle LAC$. Из этого подобия следует, что $a^2 = b^2 + bc$, откуда, в свою очередь, получается, что $a = \sqrt{3}$. Но это значит, что треугольник ABC прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$) и $\angle A = 60^\circ$.

413. $\frac{2k}{(k+1)^2}$. Воспользуйтесь

тем, что диагональ ромба – бис-

сектриса угла треугольника ABC .

414. $13S$.

415. $\frac{rR(R+r)}{R-r}$.

416. $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

417. $c^2 + s^2$.

418. $tmn, tm^2, t(m^2 - n^2)$, где m и n – взаимно простые натуральные числа, $m < n < 2m$, t – произвольное натуральное число. Из указания к задаче 412 следует, что стороны a, b и c удовлетворяют уравнению

$$a^2 = b(b+c),$$

решения которого в целых числах нам предстоит найти. Будем считать, что $\text{НОД}(a, b, c) = 1$. Тогда $\text{НОД}(a, c) = 1$, $\text{НОД}(b, c) = 1$. Пусть $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$. Рациональные числа x и y удовлетворяют уравнению

$$x^2 = y^2 + y.$$

Положив $y = kx$, где k – некоторое рациональное число, имеем

$$x = \frac{k}{1 - k^2}, \quad y = \frac{k^2}{1 - k^2}.$$

Запишем k в виде $k = \frac{m}{n}$, где m и n ($m < n$) – взаимно простые натуральные числа.

Тогда $x = \frac{mn}{n^2 - m^2}$, $y = \frac{m^2}{n^2 - m^2}$. Так как $\frac{a}{c} = x$, $\frac{b}{c} = y$, из взаимной простоты числителей и знаменателей следует $a = mn$, $b = m^2$, $c = n^2 - m^2$.

Из неравенства треугольника $a + b > c$ получим после преобразований, что $n < 2m$. Итак, все взаимно простые тройки описаны. Умножением тройки на произвольные натуральные t получаем все решения.

419. Докажите, что $S_1 S_4 = S_2 S_3$. Далее воспользуйтесь тем, что число, оканчивающееся цифрами ...65, не может быть полным квадратом.

420. 90° . Докажите, что $C_1 A_1$ и $C_1 B_1$ – биссектрисы углов $CC_1 B$ и $CC_1 A$ соответственно.

421. $1/2$.

422. $1/2$.

423. Из условия следует, что $a + b = c + d$, $a + d = b + c$, откуда $a = c$, $b = d$, после чего из равенства $a + d + e = a + b + m$ получаем $e = m$.

424. Пусть α и β – наименьшие углы данных треугольников, S_1 и S_2 – их площади, c_1 и c_2 – их гипотенузы. Из формул

$S_1 = \frac{1}{4} c_1^2 \sin^2 2\alpha$, $S_2 = \frac{1}{4} c_2^2 \sin^2 2\beta$ следует, что $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$, т.е. $\alpha = \beta$.

425. Воспользуйтесь тем, что расстояние от вершины C треугольника до точки касания с впи-

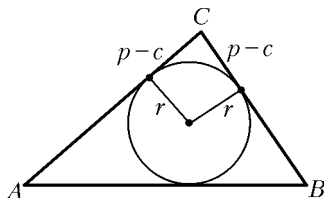


Рис. 85

санной окружностью равно $p - c$, p – полупериметр треугольника (рис.85).

426. Центр O квадрата лежит на описанной окружности.

427. Точки B, K, H и A лежат на одной окружности. Поэтому $\angle KBH = \angle KAH = 60^\circ$. Аналогично, $\angle KCH = \angle KPH = 60^\circ$.

428. Пусть S – площадь треугольника, a, b, c – его стороны, h_a, h_b, h_c – соответствующие высоты. Стороны квадратов равны соответственно $\frac{ah_a}{a + h_a} = \frac{2s}{a + h_a}, \frac{2s}{b + h_b}, \frac{2s}{c + h_c}$, откуда $a + h_a = b + h_b = c + h_c$. Отсюда получите, что $a = b = c$.

429. Треугольники KAD , LCD и KBL равны по двум сторонам и углу между ними (рис.86).

430. Докажите, что данный треугольник не может быть остро-

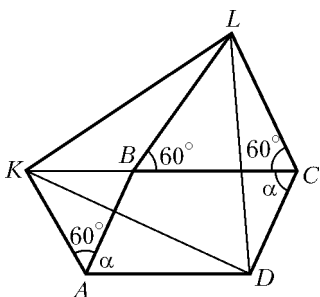


Рис. 86

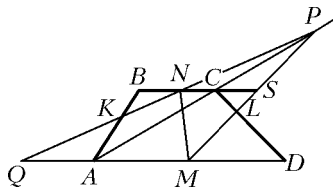


Рис. 87

угольным, затем рассмотрите случай тупоугольного треугольника.

431. Докажите, что у этих трапеций соответствующие углы равны, и используйте теорему о сегменте, вмещающем данный угол (см. задачу 374).

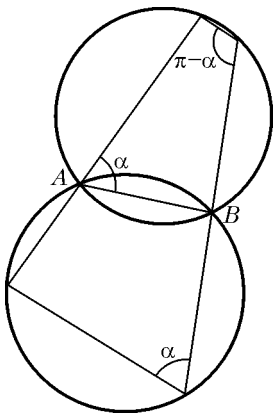


Рис. 88

432. Из подобий треугольников следует, что (рис.87)

$$\frac{BK}{KA} = \frac{BN}{AQ} = \frac{NC}{QA} = \frac{PC}{PA}$$

и

$$\frac{CL}{LD} = \frac{CS}{MD} = \frac{CS}{AM} = \frac{PC}{PA}.$$

433. Удобно представить стороны пятиугольника как векторы и через них выразить указанный отрезок. Возможны и другие решения.

434. Рассмотрите вписанные углы (рис.88).

435. Пусть K, L, M и N – середины сторон четырехугольника (рис.89). Треугольники NPM и BKL равны. Поэтому $S_{BLK} = S_{NPM} = S_{NOM} = \frac{1}{4} S_{ABC}$. Кроме того, $S_{MND} = \frac{1}{4} S_{ACD}$, так что $S_{NOMD} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

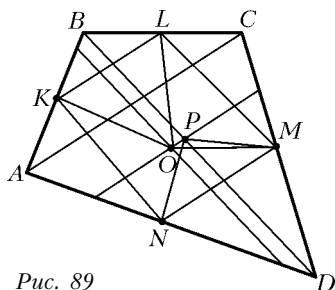


Рис. 89

436. Это следует из того, что выделенные на рис.90 дуги $\overset{\frown}{KL}$ и $\overset{\frown}{MN}$ в сумме дают 180° (докажите это!).

437. Докажите, что угловая мера суммы дуг $\overset{\frown}{KBM}$ и $\overset{\frown}{LDN}$ равна 180° (рис.91).

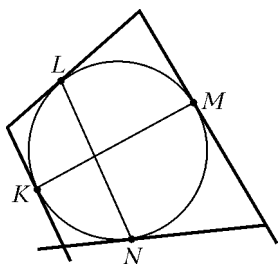


Рис. 90

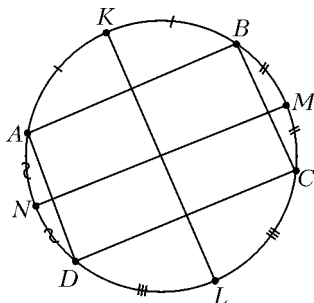


Рис. 91

438. Площадь треугольника BLC равна сумме площадей треугольников ABK и KCD (рис.92).

439. Воспользуйтесь тем, что около четырехугольника $AMBO$ (рис.93) можно описать окружность, а угол AMB равен одному из углов, образованных диагоналями прямоугольника.

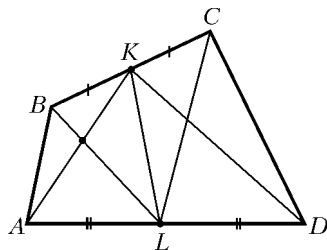


Рис. 92

440. Заметим, что

$$\angle T_1 A T_2 = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} \quad (\text{рис.94}). \quad \text{Поэтому} \quad \angle 1 + \angle 2 = \frac{\alpha}{2} \quad \text{и}$$

$$\angle M_1 T_2 M_2 = 180^\circ - \angle P T_2 T_1 - \angle 1 - \angle 2 = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ.$$

441. Пусть P, Q, R, S – основания перпендикуляров,

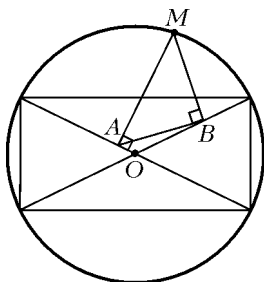


Рис. 93

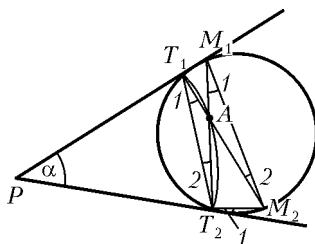


Рис. 94

опущенных из точки M описанной окружности на прямые AB , BC , CD и DA соответственно (рис.95). Докажите, что треуголь-

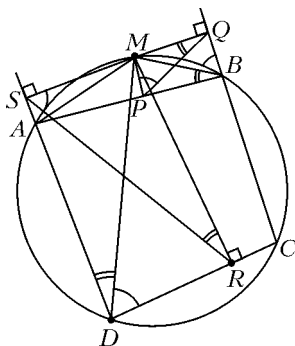


Рис. 95

ники SMR и MPQ подобны, пользуясь тем, что каждая из четверок точек S, M, R, D и M, Q, B, P лежит на некоторой окружности (каждая четверка – на своей). Аналогичное рассуждение проведите и для диагоналей четырехугольника.

442. Пусть $ABCD$ – трапеция ($AD \parallel BC$). Рассмотрите треугольник ACK , где $CK \parallel BD$, а точка K лежит на прямой AD .

443. Проведите две указанные секущие, соедините точки их пересечения с окружностями с точкой B и докажите подобие образовавшихся треугольников.

444. Пусть R – радиус окружности. Докажите, что $AM^2 + BM^2 = 2R^2$. Один из способов доказательства связан с таким утверждением: если AB и CD – перпендикулярные хорды окружности радиуса R , то $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

445. Диаметр BE перпендикулярен хорде AC , а углы BAC и CAD равны. Поэтому $AB = AF$. Вторая часть утверждения следует из того, что $EC \perp AD$.

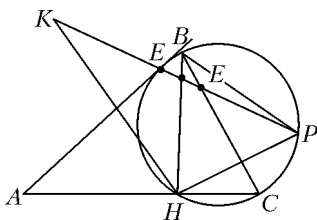


Рис. 96

446. Пусть O – центр окружности. Докажите подобие треугольников OAP и OPB .

447. Пусть E – точка пересечения KP и AB (рис.96). Пользуясь тем, что точки K, H и P лежат на

одной окружности с центром B , докажите, что $2\angle HKP = \angle HBP$. Отсюда следует, что $\angle HEP = \angle HBP$, т.е. что точки E, H, P лежат на окружности с диаметром BC .

448. $\angle MBD = \angle MCD = \angle MAB$.

449. Чтобы догадаться, что это за окружность, начертите побольше равнобедренных треугольников; особенно внимательно проследите, что происходит с их боковыми сторонами, когда основание стремится к нулю или к бесконечности. Искомая окружность касается данной прямой в точке A и в 2 раза больше вписанной окружности.

450. Соедините последовательно центры полученных окружностей и докажите, что построенные отрезки проходят через вершины данного четырехугольника, после чего докажите, что суммы противоположных углов полученного четырехугольника равны по 180° .

451. Докажите, что в четырехугольнике $O_1O_2PO_2$ (мы считаем, что C лежит между A и B) $\angle O_3 = 180^\circ - \angle PCB$, а $\angle O_2 = 180^\circ - \angle PCA$.

452. Докажите сначала, что если X и Y – точки, лежащие соответственно на двух окружностях, пересекающихся в точках K и H , то точки X, K и Y лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle XKH + \angle YKH = 360^\circ$.

453. Докажите, что $\angle CMB = 180^\circ - \angle CAB$, этим будет доказано второе утверждение, а затем – что дуга CM окружности, описанной вокруг треугольника ABC , равна дуге MB той же окружности, откуда следует первое утверждение.

454. Постройте окружность на AC как на диаметре и докажите лемму: если три окружности пересекаются, то три их общие хорды пересекаются в одной точке.

455. Покажите, что если начать соответствующее построение из произвольной точки, то в результате получим одну и ту же точку.

456. Для центра каждой окружности рассмотрите все точки, удаленные от этого центра не дальше, чем от любого другого, и покажите, что это – выпуклый многоугольник, содержащий выбранную окружность, а также, что все такие многоугольники, примыкая друг к другу, заполняют весь квадрат.

457. Рассмотрите последовательность углов между разрезами и соответствующими сторонами многоугольника.

458. Отношение расстояний от точки M до плоскостей ABC и $A'B'C'$ равно отношению площадей треугольников ABC и $A'B'C'$. Искомое геометрическое место – две плоскости, прохо-

дящие через линию пересечения плоскостей ABC и $A'B'C'$ (саму линию следует исключить).

459. Эти отрезки – диагонали параллелограммов, образованных средними линиями граней.

460. Углы при самом большом ребре тетраэдра – острые.

461. Пусть $ABCD A'B'C'D'$ – параллелепипед без прямых плоских углов. Можно считать, что углы A и A' в основаниях $ABCD$ и $A'B'C'D'$ тупые, и, следовательно, углы B и B' острые. Рассматривая грань $ABA'B'$, видим, что либо к вершине A прилежат два тупых угла, а к вершине B – два острых, либо к вершине A' – два тупых, а к вершине B' – два острых. Теперь ясно, что, как бы ни располагались тупые углы в гранях $ADD'A$ и $BCC'B$, ровно в одной из вершин A, B, A', B' сходятся три тупых или три острых угла.

462. $n + 1$ ребро. Многоугольник, получающийся в сечении, не может иметь больше сторон, чем количество граней пирамиды.

463. Пусть есть m -гранник, имеющий 7 ребер. Ни одна из его граней не может быть четырехугольником. Значит, все его грани – треугольники. Но тогда он имеет $\frac{3m}{2}$ ребер, что невозможно, так как 7 не делится на 3. Многогранник с $2m$ ребрами – n -угольная пирамида, а с $2n + 3$ ребрами – n -угольная пирамида, на одной из боковых граней которой как на основании построен тетраэдр.

464. Пусть h_1, h_2, \dots, h_n – расстояния от точек A_1, A_2, \dots, A_n до плоскости. Произведение из условия задачи равно

$$\frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{h_2}{h_3} \cdot \dots \cdot \frac{h_{n-1}}{h_n} \cdot \frac{h_n}{h_1} = 1.$$

465. а) Доказательство ничем не отличается от доказательства аналогичной теоремы планиметрии.

б) Пусть стороны AB, BC, CD и DA касаются сферы в точках K, L, M, N соответственно. Очевидно, что

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1.$$

Проведем плоскость через точки K, L, M и докажем, что она пересечет ребро DA в точке N . Пусть N^* – точка пересечения секущей плоскости с DA . Тогда (см. задачу 464)

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN^*}{N^*A} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{DN}{NA} = \frac{DN^*}{N^*A}.$$

Итак, $N = N^*$.

466. а) $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ и $\frac{AP}{AO} = x$. Тогда

$$S_{AKL} = S_{AKP} + S_{ALP} = \alpha x S_{ABO} + \beta x S_{AOD} = \alpha\beta S_{ABD}.$$

б) $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}$. Воспользуйтесь результатом пункта а).

467. а) Рассмотрите развертку тетраэдра и воспользуйтесь тем, что если α, β, γ – плоские углы трехгранного угла, то $\alpha + \beta > \gamma$.

б) Докажем, например, что $a = a'$ (рис.97). Из равенства периметров граней следует, что $a + b = a' + b'$ и $a + b' = b + a'$. Сложив эти равенства, получим, что $a = a'$. Равенства $b = b'$ и $c = c'$ доказываются аналогично.

в) Развертка тетраэдра – треугольник, в котором проведены средние линии.

г) Все грани – остроугольные треугольники, причем углы, показанные на рисунке 97, равны. Кроме того, равны радиусы окружностей, описанных около граней.

д) См. задачу 459.

е) Докажите, что проекция тетраэдра на плоскость, параллельную ребрам AB и CD , – параллелограмм, и получите отсюда равенство ребер AC и BD , а также AD и BC , после чего аналогично установите равенство $AB = CD$. Можно также воспользоваться тем, что отрезок, соединяющий середины ребер AB и CD , перпендикулярен этим ребрам.

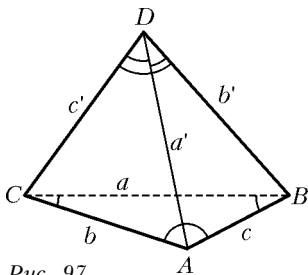


Рис. 97

468. Пусть A' и B' – проекции точки A и B на плоскость. Нас интересуют точки M , для которых $\frac{A'M}{B'M} = \frac{A'A}{B'B}$. Геометрическим местом точек M будет окружность (или прямая, если $AA' = BB'$)

469. а) Пусть l_1 и l_2 – любые две из данных прямых и есть третья прямая l_3 , не проходящая через их точку пересечения.

Тогда прямые l_1, l_2, l_3 лежат в одной плоскости и всякая другая прямая, пересекаясь с каждой из прямых l_1, l_2, l_3 , имеет по меньшей мере 2 общие точки с этой плоскостью.

б) Пусть две из данных окружностей ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Если есть окружность ω_3 , пересекающаяся с каждой из них в двух точках и не проходящая через обе точки A и B , то имеются две возможности. 1) Окружности ω_1 и ω_2 лежат в одной плоскости, но тогда ω_3 имеет 3 общих точки с этой плоскостью. 2) Если ω_1 и ω_2 не лежат в одной плоскости, то они принадлежат некоторой сфере и тогда ω_3 лежит на этой сфере. Остальные окружности также лежат в первом случае – на плоскости, во втором – на сфере.

470. а), б). Докажите, что если высоты из вершин A и D пересекаются, то $AD \perp BC$ и, наоборот, если $AD \perp BC$, то и высоты пересекаются.

Далее может оказаться полезной ссылка на задачу 469, а).

в) Впишем тетраэдр $ABCD$ в параллелепипед, проведя пары параллельных плоскостей через его ребра. Докажите, что противоположные ребра тетраэдра перпендикулярны тогда и только тогда, когда все грани этого параллелепипеда – ромбы, т.е. все

ребра параллелепипеда равны, а диагонали граней равны ребрам тетраэдра. Далее воспользуйтесь тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

г) Если основание высоты тетраэдра – ортоцентр грани, то, по теореме о трех перпендикулярах, его противоположные ребра перпендикулярны.

д) Не могут. Из пункта в) следует (рис.98), что $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$. По теореме косинусов

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2,$$

$$2a_1c \cos \beta = a_1^2 + c^2 - b_1^2 = (b_1^2 + b^2 - a^2) + c^2 - b_1^2 = b^2 + c^2 - a^2,$$

аналогично

$$2a_1b \cos \gamma = b^2 + c^2 - a^2.$$

Поэтому $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ имеют одинаковые знаки и, следовательно, все углы при вершине A либо острые, либо прямые, либо

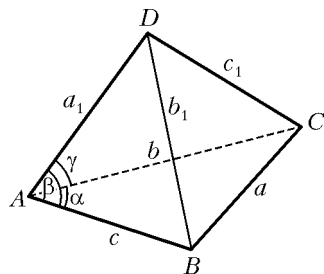


Рис. 98

тупые. То же самое относится и к любой другой вершине. Однако двух вершин, в которых сходились бы только тупые или только прямые углы, в тетраэдре быть не может, так что либо одна из граней с вершиной A , либо грань BDC – остроугольный треугольник.

471. Рассмотрите треугольник BDK (рис.99). В нем DK и BK – медианы граней ABC и ADC , M и N – их центры тяжести. Найдите отношение $OM : OD$ (например, воспользуйтесь методом решения задачи 466, а)).

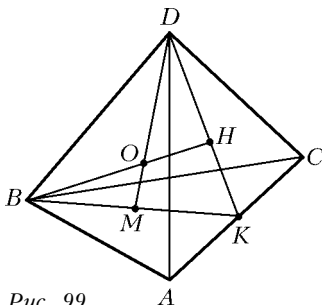


Рис. 99

472. Разделите многоугольник на треугольники и трапеции прямыми, параллельными горизонтальной плоскости, и воспользуйтесь тем, что при проектировании их высоты умножаются на $\cos \alpha$, а основания не меняются.

473. Площадь проекции параллелепипеда равна удвоенной площади проекции треугольника KLM (рис.100) и будет максимальной, когда плоскость KLM горизонтальна.

474. Проекция тетраэдра – либо треугольник, либо четырехугольник. В первом случае площадь проекции не больше площади одной из граней. Во втором – не

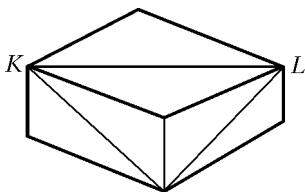


Рис. 100

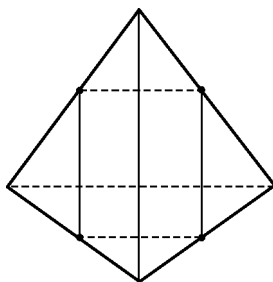


Рис. 101

больше удвоенной площади проекции параллелограмма – сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через середины четырех ребер и параллельной двум остальным ребрам (рис.101). Далее рассуждаем так же, как в предыдущей задаче. Правильную пирамиду при $b \geq \frac{a\sqrt{3}}{2}$ нужно располагать так, чтобы одно ребро основания и противоположное ему боковое ребро были горизонтальны, а при $b \leq \frac{a\sqrt{3}}{2}$ горизонтальной должна быть плоскость основания.

475. 6S. В каждой грани соедините точки касания с вершинами и рассмотрите возникающие при этом треугольники.

476. Пусть O – центр шара, R – его радиус, P – точка внутри шара, $OT = d$, через d_1, d_2, d_3 обозначим расстояния от O до попарно перпендикулярных плоскостей, проведенных через точку P . Докажите, что $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = d^2$ (отсюда получится, что сумма площадей кругов равна $\pi(3R^2 - d^2)$).

477. а) Пусть такой шар существует, тогда отрезки от каждой вершины до точек касания ребер, выходящих из этой вершины, равны. На каждой паре противоположных ребер лежит ровно по

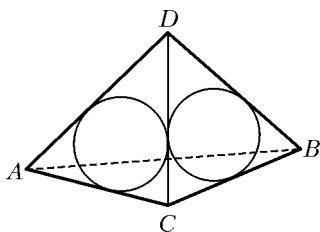


Рис. 102

одному из этих отрезков. Поэтому условие $AB + CD = AC + BD = BC + AD$ выполняется. Для доказательства обратного утверждения покажите, что из равенства сум противоположных ребер следует, что окружности, вписанные в соседние грани, касаются их общих ребер в одной и той же точке (рис.102). После этого докажите,

что все вписанные в грани окружности лежат на одной сфере.

б) Если шар касается ребер AB , BC и CA и продолжений ребер AD , BD и CD , то $AB - CD = BC - AD = CA - BD$.

в) Из полученных условий следует, что два шара типа б) существуют тогда и только тогда, когда противоположные ребра равны. При этом существуют и два других шара типа б).

Шар типа а) и шар типа б) существуют только для правильных пирамид (шар б) при этом касается ребер основания).

г) Следует из в).

478. Пусть l_1 и l_2 – прямые, по которым пересекаются противоположные грани четырехгранного угла (они проходят через его вершину). Всякая плоскость, параллельная плоскости, проходящей через l_1 и l_2 , и пересекающая ребра четырехгранного угла, пересекает его по параллелограмму.

479. 5, 6, 7 или 8. Заведомо существует сфера, касающаяся всех граней тетраэдра (вписанная сфера) и четыре сферы, касающихся граней и их продолжений (внеписанные сферы). Кроме того, имеются еще шесть областей (в форме четырехскатной крыши), примыкающих к ребрам тетраэдра и ограниченных всеми четырьмя плоскостями граней. На рисунке 103 такой «крышей» является $A'A''B'BB''$. Если существует сфера, касающаяся всех граней «крыши», то ее центр I принадлежит

биссекторной плоскости π двугранного угла с ребром AB и прямой l , проходящей через вершину A и состоящей из точек, одинаково удаленных от плоскостей ABD , ABC и ADC (биссектриса трехгранного угла $AA'A''B$). Поскольку для «крыши» при ребре CD центр вписанной в нее сферы должен также принадлежать упомянутым плоскости и прямой, из единственности точки пересечения прямой и плоскости следует, что если в одну из «крыш» можно вписать сферу, то в противоположную ей – нельзя.

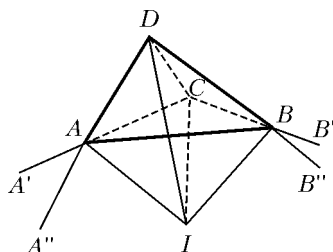


Рис. 103

Допустим, что точка I пересечения прямой l и плоскости π принадлежит «крыше» с ребром AB . Пусть ρ – расстояние от точки I до всех четырех плоскостей. Рассмотрим шестигранник $DACBI$. Пусть площади граней ABC , ADB , ADC и BDC равны соответственно S_1, S_2, S_3, S_4 . Тогда объем V тетраэдра ABC , очевидно, равен

$$V = V_{IADC} + V_{IBDC} - V_{IADB} = \frac{1}{3} \rho (S_3 + S_4 - S_1 - S_2).$$

Таким образом, для существования вписанной в «крышу» сферы необходимо условие $S_3 + S_4 > S_1 + S_2$. Докажем, что это условие является и достаточным. Пусть I – точка, удаленная от трех из

данных плоскостей на расстояние, равное $\frac{3V}{S_3 + S_4 - S_1 - S_2} = \rho$, а ρ' – расстояние от I до четвертой из них (например, до плоскости ABC). Тогда

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \rho (S_3 + S_4 - S_2) - S_1 \frac{1}{3} \rho' = \frac{1}{3} \rho (S_3 + S_4 - S_1 - S_2).$$

Откуда $\rho = \rho'$.

Итак, если $S_3 + S_4 > S_1 + S_2$, сфера вписывается в «крышу» с ребром AB , если $S_1 + S_2 > S_3 + S_4$ – в «крышу» с ребром CD . При $S_3 + S_4 = S_1 + S_2$ такой сферы нет. Таким образом, если $S_1 + S_2 \neq S_3 + S_4$, $S_1 + S_3 \neq S_2 + S_4$, $S_1 + S_4 \neq S_2 + S_3$, существуют все 3 вневыписанные сферы второго рода. Если верно только оно из равенств $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$, $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$, $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$, таких сфер две, если два равенства, то одна и, наконец, если все 3 равенства, т.е. если $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ – ни одной.

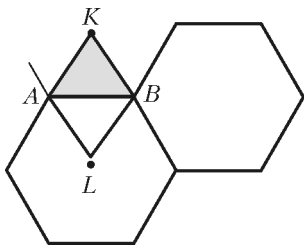


Рис. 104

480. а) Пусть сфера касается двух — черной и белой — граней многогранника с общим ребром AB (рис.104) в точках K и L соответственно. Треугольники AKB и ALB равны по трем сторонам и, следовательно, имеют равные площади. Так как всякая черная грань граничит только с белыми гранями, а сумма площадей всех рассмотренных тре-

угольников, равная сумме площадей черных граней, больше суммы площадей белых граней, возникает противоречие.

б) Рассуждение аналогично. Только нужно рассматривать не площади треугольников AKB и ALB , а *углы* при вершинах K и L . Сумма этих углов для черных граней равна $2\pi t$, где t — число черных граней, и, следовательно, больше, чем $2\pi k$, где k — число белых граней.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Глава 1	
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ	5
Алгебраические преобразования (5). Преобразования числовых выражений (6). Цифры и числа (7). Последовательности и прогрессии (8). Квадратный трехчлен (10). Неравенства и оценки (11). Алгебраические уравнения (14). Системы уравнений (15). Многочлены (16). Тригонометрические подстановки (17).	
Глава 2	
ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ	19
Делимость и делители (19). Сравнения по модулю и арифметика остатков (20). Разложение на множители (21). Десятичная запись числа (21). Бесконечность множества простых чисел (23). Несколько теорем (24). Смесь (25). Уравнения в целых числах (27).	
Глава 3	
РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ	29
Последовательность операций (29). Бесконечные множества (32). Графы, комбинаторика (32). Турниры (33). Принцип Дирихле (34). Количество информации (35). Таблицы (36). Игры (37). Карточки с числами (38). Несколько теорем (39). Задачи на клетчатой бумаге (40). Расположение точек и фигур (41). Движение и преследование (44).	
Глава 4	
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ	46
Задачи на построение (46). Геометрические места точек (47). Неравенства и экстремумы (48). Задачи на вычисление (50). Задачи на доказательство: прямые и многоугольники (52). Задачи на доказательство: окружности (54). Стереометрия (57).	
ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ	61

*Николай Борисович Васильев,
Анатолий Павлович Савин,
Андрей Александрович Егоров*

Избранные олимпиадные задачи

Математика

Библиотечка «Квант». Выпуск 100

Приложение к журналу «Квант» №2/2007

Редактор *А.Ю.Котова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 85

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская.

Печать офсетная. Объем 5 печ.л. Тираж 3500 экз.

Заказ №

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: admin@kvant.info

Отпечатано в ОАО Ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области.

Сайт: www.chpk.ru. E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672)6-25-36, факс: 8(499)270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59